

2018 年上半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(初级中学) 参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D。解析：有理数与有理数的乘积仍然是有理数，所以对于乘法运算是封闭的，A 项正确；有理数可以通过数轴法、绝对值法、差值法等比较大小，B 项正确；实数集包括无理数集和有理数集，有理数集是实数集的子集，C 项正确；全体有理数构成的集合是有理数集，记为 $\mathbf{Q}$ ，任意 $x \in \mathbf{Q}$ ，都有 $x+1 \in \mathbf{Q}$ ， $x-1 \in \mathbf{Q}$ ，所以有理数集无上界也无下界，是无界集，D 项错误。故本题选 D。

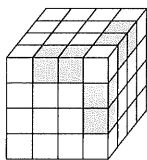
2.【答案】A。解析：两个向量的数量积也称“点乘”，结果是一个数；向量积也称“叉乘”，结果是一个向量，其方向满足右手定则，垂直于原向量的平面。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 为向量积，方向与 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 向量垂直，所以 A 项正确，B 项错误； $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 为数量积，结果是一个数，无方向可言，所以 C 项和 D 项错误。故本题选 A。

3.【答案】D。解析：已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，闭区间内连续函数必有界，则必有最大值，所以 A 项中命题正确。根据函数一致连续性定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续。所以 B 项中命题正确。 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积。所以 C 项中命题正确。连续函数不一定可导，比如 $y=|x|$ 连续，但在 $x=0$ 处由于其左右导数不相等，所以不可导，D 项中命题不正确。故本题选 D。

4.【答案】B。解析：有 n 个未知量的非齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ 有解的充要条件是其系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩等于其增广矩阵 $\mathbf{B}$ 的秩。而当 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})<n$ 时，方程组有无穷多个解；当 $r(\mathbf{A})<r(\mathbf{B})$ 时，方程组无解。

本题中，因为线性方程组 $\begin{cases} ax+by=u, \\ cx+dy=v \end{cases}$ 的系数矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 与增广矩阵 $\begin{pmatrix} a & b & u \\ c & d & v \end{pmatrix}$ 的秩均为 2，且等于未知量个数，所以该方程组有唯一解。

5.【答案】A。解析：先求两个面被涂成红色的小正方体个数。每条棱上有 2 个小正方体有两面被涂成红色，共有 12 条棱，所以共有 24 个小正方体恰有两面被涂成红色，所求概率是 $\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$ 。



6.【答案】B。解析：双曲柱面 $x^2-y^2=1$ 和平面 $2x-y-2=0$ 可看作是 xOy 平面内双曲线 $x^2-y^2=1$ 和直线 $2x-y-2=0$ 沿平行 z 轴方向平移得到。联立两个方程消去 y ，得 $3x^2-8x+5=0$ ，其中 $\Delta=b^2-4ac=64-60=4>0$ ，故在 xOy 平面内双曲线 $x^2-y^2=1$ 和直线 $2x-y-2=0$ 有两个交点。沿着平行 z 轴方向平移这两个点，就得到了两条平行直线，即双曲柱面 $x^2-y^2=1$ 与平面 $2x-y-2=0$ 的交为平行于 z 轴的两条平行直线。

7.【答案】D。解析：“尺规作图三大问题”是指三等分角，即三等分一个任意角；立方倍积问题，即作一个立方体，使它的体积等于已知立方体体积的二倍；化圆为方问题，即作一个正方形，使它的面积等于已知圆的面积。故本题选 D。

8.【答案】C。解析：指数函数是高中数学必修 1 中的内容。

二、简答题

9.【参考答案】

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, |\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \neq 0, \text{ 所以 } \mathbf{A} \text{ 可逆.}$$

$$\text{又 } A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

10.【参考答案】

令 $F(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 - 20$, 可得 $F'_x(x, y, z) = 6x, F'_y(x, y, z) = -4y, F'_z(x, y, z) = 2z$, 所以题中二次曲面的切平面的法向量为 $(6x, -4y, 2z)$ 。

将点 $(1, 2, 5)$ 代入到 $F(x, y, z)$ 的偏导数中, 可得过点 $(1, 2, 5)$ 的切平面的法向量为 $(6, -8, 10)$ 。

11.【参考答案】

先证满射。对任意 $g(x) = a \cos x + b \sin x \in V$, 有 $\int g(x) dx = \int (a \cos x + b \sin x) dx = a \sin x - b \cos x + C$, 所以存在 $f(x) = -b \cos x + a \sin x \in V$, 使得 $Df(x) = f'(x) = g(x)$, 即 D 是 V 到 V 上的满射。

再证单射。对于 $f_1(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x \in V$ 和 $f_2(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x \in V$, 如果 $f_1(x) \neq f_2(x)$, 则 $f_1(x) - f_2(x) = (a_1 - a_2) \cos x + (b_1 - b_2) \sin x = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \sin(x + \varphi) \neq 0$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 所以 $a_1 = a_2$ 和 $b_1 = b_2$ 不同时成立。

$Df_1(x) = -a_1 \sin x + b_1 \cos x, Df_2(x) = -a_2 \sin x + b_2 \cos x$, 则 $Df_1(x) \neq Df_2(x)$ 。若不然, 有 $Df_1(x) = -a_1 \sin x + b_1 \cos x = -a_2 \sin x + b_2 \cos x = Df_2(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立。当 $x=0$ 时, 有 $b_1 = b_2$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $a_1 = a_2$, 与“ $f_1(x) \neq f_2(x)$ 时 $a_1 = a_2$ 和 $b_1 = b_2$ 不同时成立”相矛盾。即证得 D 是 V 到 V 上的单射。

相关知识点

设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射,

若 $f(A) = B$, 即 B 中任一元素 b 都是 A 中某元素的像, 则称 f 为 A 到 B 上的满射;

若对 A 中任意两个不同元素 $a_1 \neq a_2$, 它们的像 $f(a_1) \neq f(a_2)$, 则称 f 为 A 到 B 的单射;

若映射 f 既是单射, 又是满射, 则称映射 f 为 A 到 B 的“双射”(或“一一映射”)。

12.【参考答案】

教学方法是教师引导学生掌握知识技能, 获得身心发展而共同活动的方法。选择中学数学教学方法的依据:
①符合教学规律和教学原则; ②符合教学目标和任务; ③符合教学内容的特点; ④符合学生的发展水平; ⑤符合教师的特长; ⑥符合教学的经验性。

13.【参考答案】

三角形的中位线定理: 三角形的中位线平行于三角形的第三边, 并且等于第三边的一半。“探索”是过程目标行为动词, “证明”是结果目标行为动词。“探索并证明三角形中位线定理”这一目标的设置, 要求学生不仅要记住该定理的内容, 还需要掌握该定理的推导过程, 联系知识间的内在关系, 体会其中的数学思想, 为进一步的学习提供必要的数学准备。

探索并证明三角形中位线定理有助于学生认识数学内容之间的内在联系。三角形中位线定理的证明需要运用三角形全等的性质定理和判定定理、三角形相似的性质定理和判定定理、平行四边形的性质定理和判定定理等知识, 而三角形中位线定理不仅为学生学习后续的平面图形、立体图形等内容奠定基础, 并且在图形证明和计算中发挥着重要的作用。学生经历探索并证明三角形中位线定理的学习过程, 能够更好地体会并理解这些知识内在的联系, 对学生构建知识体系, 增强学习数学的信心也很有帮助。

探索并证明三角形中位线定理的过程能够提高学生的推理能力。从几何直观出发猜想三角形中位线和第三边的关系到运用三角形全等和平行四边形的相关知识严格地证明猜想的过程, 就是从观察、归纳、猜想到用严密的数学思维和严谨的推理过程验证猜想的过程, 就是学生学习并应用合情推理和演绎推理的过程。经历这一过程可以增强学生综合应用合情推理和演绎推理来发现问题、解决问题的能力。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 令 $y = \ln f(x)$, 则 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 。

(2) 由 $f'(x) - 3x^2 f(x) = 0$ 整理得 $\frac{df(x)}{f(x)} = 3x^2 dx$,

分离变量得 $\frac{df(x)}{f(x)} = 3x^2 dx$,

两边同时积分得 $\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int 3x^2 dx$, 即 $\ln f(x) = x^3 + C$,

故 $f(x) = e^{x^3+C} = C_1 e^{x^3}$ 。

又因为 $f(0) = C_1 = 1$, 所以 $f(x) = e^{x^3}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

教学活动应努力使全体学生达到课程目标的基本要求,同时要关注学生的个体差异,促进每个学生在原有基础上的发展。

对于学习有困难的学生,教师要给予及时的关注与帮助,鼓励他们主动参与数学学习活动,并尝试用自己的方式解决问题、发表自己的看法;要及时地肯定他们的点滴进步;耐心地引导他们分析产生困难或错误的原因,并鼓励他们自己去改正,从而增强学习数学的兴趣和信心。对于学有余力并对数学有兴趣的学生,教师要为他们提供足够的材料和思维空间,指导他们阅读,发展他们的数学才能。

在教学活动中,要鼓励与提倡解决问题策略的多样化,恰当评价学生在解决问题过程中所表现出的不同水平。问题情境的设计、教学过程的展开、练习的安排等要尽可能地让所有学生都能主动参与,提出各自解决问题的策略。引导学生通过与他人交流选择合适的策略,丰富数学活动的经验,提高思维水平。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 学生在计算过程中错把 $-1 - \frac{1}{5}$ 算成了 $-\frac{4}{5}$, 应该是 $-\frac{6}{5}$ 。

出现这样的错误,有以下几个原因:①学生没有完全理解正数和负数的概念,没能将正数、负数和相反数这些概念联系起来;②学生对于符号的认识和理解不够全面,比如数学符号“-”,除了当作减号进行运算外,还可以当作负号,表示一个数的相反数;③学生对于负数的运算法则和运算律掌握不扎实;④教师在新课讲解过程中,对学生的预设不足,对于学生难以理解的知识点,没有进行更加细致和通俗的讲解。

(2) 例 1 是有理数的减法。第一步是利用有理数减法法则,减去一个数等于加这个数的相反数,将减法转化为加法。第二步是同号有理数加法,取相同的符号,然后把绝对值相加。

例 2 是有理数的减法。第一步利用有理数的减法法则,减去一个数等于加这个数的相反数,将减法转化为加法。第二步是两个异号的绝对值不相等的有理数相加,取绝对值较大数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 某超市出售一种牛奶糖和一种水果糖,牛奶糖单价 15 元/千克,水果糖单价 10 元/千克,为了满足广大消费者的不同需求,超市决定将两种糖混合销售,并设计了以下五种比例的混合方式:

方式	牛奶糖(千克)	水果糖(千克)
①	1	1
②	1	4
③	2	3
④	3	2
⑤	4	1

引导学生思考：

①这五种混合糖的平均单价一样吗？全部用 12.5 元/千克的“平均”单价销售，是否合理？

②若不一样，哪一种应该最高？哪一种应该最低？如何设置这五种混合糖的单价才最为合理？

(2)在计算加权平均数时，权重可以表示总体中的各种成分所占比例；权重越大的数据在总体中所占的比例越大，它对加权平均数的影响也越大。在计算加权平均数时，常用权重来反映对应的数据的重要程度；权重越大的数据越重要。

(3)某单位欲从内部招聘一名管理员，对甲、乙、丙三名候选人进行了笔试、面试和民主评议，三人的测试成绩如下表所示：

测试项目	测试成绩		
	甲	乙	丙
笔试	75	80	90
面试	93	70	68
民主评议	50	80	70

①如果根据三项测试的平均成绩确定录用人选，那么谁将被录用？

②根据实际需要，单位将笔试、面试、民主评议三项测试得分按 4:3:3 的比例确定个人的成绩，那么谁将被录用？

③思考算术平均数与加权平均数有什么联系和区别呢？

【设计意图】在实际问题的教学中让学生理解，由于各个数据在本组数据中的重要程度未必相同，因而每个数据都有一个“权”，在各项权不相等时，就应采用加权平均数。设计的该题目中笔试成绩这个数据明显比面试成绩和民主评议成绩更重要一些，若使用算术平均数对该问题进行求解，则无法体现笔试成绩在该项数据中的“重要程度”。