

2019 年上半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。解析：本题考查有理数与无理数的性质。(1)有理数与有理数：和、差、积、商均为有理数(求商时分母不为零)。(2)有理数与无理数：①一个有理数和一个无理数的和、差为无理数；②一个非零有理数与一个无理数的积、商为无理数。(3)无理数与无理数：和、差、积、商可能是有理数，也可能是无理数。故本题选 A。

2.【答案】B。解析：本题考查空间曲线的方程。由
$$\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = a \sin^2 t, \\ z = a \sin 2t \end{cases}$$
 可得 $x+y=a\cos^2 t+a\sin^2 t=a, z^2=a^2(2\sin t \cos t)^2=4xy$, 所以将参数方程化成一般方程为
$$\begin{cases} x+y=a, \\ z^2=4xy. \end{cases}$$
 故本题选 B。

3.【答案】D。解析：本题考查直角坐标与球坐标变换、空间曲面方程。

(方法一)设球坐标中任意一点 $P(\rho, \theta, \varphi)$, 根据题目中空间直角坐标与球坐标的变换公式可知, ρ 表示原点 O 与点 P 之间的径向距离, θ 表示 OP' 到 OP 的有向角, 其中 OP' 是 OP 在 xOy 坐标面上的投影, φ 表示 Ox 轴到 OP' 的有向角, 如图 1 所示。因此, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 表示以原点为顶点, 以射线 OP 为母线, 以 z 轴为中心轴的半锥面, 如图 2 所示。故本题选 D。

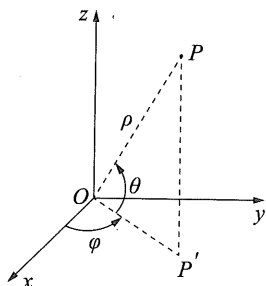


图 1

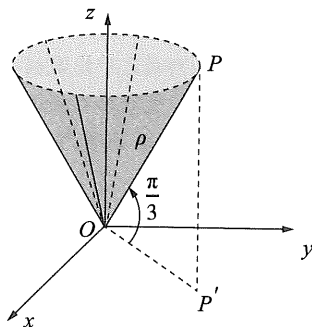


图 2

(方法二)将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入到
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta, \end{cases}$$
 得
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \rho \cos \varphi, \\ y = \frac{1}{2} \rho \sin \varphi, \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho. \end{cases}$$
 消去参数整理得 $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$, 该方程是由 yOz 平面上的射线 $z = \sqrt{3}y (y > 0)$ 绕 z 轴旋转得到的, 它表示以原点为顶点, 以射线 $z = \sqrt{3}y (y > 0)$ 为母线, 以 z 轴为中心轴的半锥面。故本题选 D。

4.【答案】C。解析：本题考查矩阵初等变换及行列式的性质。对矩阵可以作如下三种初等行(列)变换：①交换矩阵的两行(列)；②将一个非零数 k 乘到矩阵的某一行(列)；③将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上。若方阵 A , 经过以上三种初等变换得到方阵 B , 则对应的行列式的关系依次为 $|A| = -|B|$, $|A| = k|B|$, $|A| = |B|$ 。即 $|A| = a|B|$, $a \in \mathbf{R}$ 。所以 $|A| = 0$ 时必有 $|B| = 0$ 。故本题选 C。

5.【答案】B。解析：本题考查泰勒展开式的相关知识。因为 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots =$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, 所以 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} (\pi x)^{2n-1} = \sin \pi x$, $f(1) = \sin \pi = 0$ 。故本题选 B。

6.【答案】C。解析：本题考查矩阵的相似对角化的相关知识。由题意可知，矩阵 A 可以相似对角化，且 $\lambda=2$ 对应两个线性无关的特征向量，所以 $(2E-A)x=0$ 有两个线性无关的解，即有 $3-r(2E-A)=2$ ，所以 $r(2E-A)=1$ 。 $2E-A=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & 2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{要使 } r(2E-A)=1, \text{ 则有 } \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{y}, \text{ 可得 } x=2, y=-2. \text{ 故本题选 C.}$$

7.【答案】A。解析：演绎推理是从一般规律出发，运用逻辑证明或数学运算，得出特殊事物应遵循的规律，即从一般到特殊的推理。归纳推理是由个别、特殊到一般的推理，通过实验验证结论和通过观察猜想得到结论的推理都是归纳推理。故本题选 A。

8.【答案】A。解析：《义务教育数学课程标准(2011 年版)》指出，义务教育阶段数学课程目标分为总目标和学段目标，从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度等四个方面加以阐述。

二、简答题

9.【参考答案】

本题考查统计的相关知识。

(1) 根据中位数的定义可知，甲组同学脱粒数量的中位数是 $\frac{75+75}{2}=75$ ，乙组同学脱粒数量的中位数是

$$\frac{68+69}{2}=68.5.$$

(2)①通过两组数据能够求出甲、乙两组同学脱粒数量的平均值 $\bar{x}_甲=74.6$, $\bar{x}_乙=71.65$ 。根据平均数的大小比较可知，甲组脱粒速度更快。

②根据两组数据的波动情况，能够看出甲组数据更为稳定，而乙组数据波动很大。进而可知，甲组学生的脱玉米能力差不多，而乙组学生脱玉米的能力存在很大的个体差异性。也可以理解为，甲组同学在实践活动中的参与性与积极性要高于乙组同学在实践活动中的参与性与积极性。

10.【参考答案】

本题考查平面与平面的位置关系。

(1) 由题意知， $\overrightarrow{P_1P_2}=(2,3,1)$, $\overrightarrow{P_1P_3}=(-4,1,0)$ ，则平面 π 的法向量为 $n=\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -4, 14)$ 。

平面 $\frac{1}{2}x+2y-7z+3=0$ 的法向量为 $m=(\frac{1}{2}, 2, -7)$ ，所以有 $n \parallel m$ 。又点 $P_1(2,0,1)$ 不在平面 $\frac{1}{2}x+2y-7z+3=0$ 上，所以两平面平行。

(2) 设平面 π_1 与平面 π 垂直，则平面 π_1 的法向量与平面 π 的法向量垂直，所以不妨取平面 π_1 的法向量为 $\overrightarrow{P_1P_2}=(2,3,1)$ ，故可设其平面方程为 $2x+3y+z+d=0$ ，将 P_1 代入方程解得 $d=-5$ ，所以平面 π_1 方程为 $2x+3y+z-5=0$ 。

11.【参考答案】

本题考查多项式的因式分解、多项式除法。

因为 1 与 -2 为原方程的解，且易知 0 也是原方程的一个解，所以原方程等号左边的多项式可以被 $x(x-1)(x+2)$ 整除，作除法运算，得 $x^5+5x^4+5x^3-5x^2-6x=x(x-1)(x+2)(x^2+4x+3)=x(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)=0$ ，故原方程的所有解为 1, 0, -1, -2, -3。

12.【参考答案】

用统计方法解决实际问题一般有如下几个步骤：

①建立数学模型。分析实际问题，由实际问题抽象出相应的数学模型。

②收集数据。根据实际问题设计简单的调查表，或选择其他适当方法(调查、试验、测量)收集数据。其中，在

收集数据的过程中,可以全面观测所有总体并得到数据,这一过程称为普查;选取适当抽样方法从总体数据中抽取部分样本进行观测并得到数据的过程叫作抽样调查。

③整理数据。对收集到的数据进行审核、校正、整理,从而使之系统化、条理化,并用文字、图画、表格等方式表示数据。其中,可运用条形统计图、扇形统计图、折线统计图等直观地表示数据。

④分析数据。运用平均数、中位数、众数等数字特征,对样本数据进行分析,并进一步估计出总体的数字特征。

⑤解释数据。结合总体数字特征,对数据进行解读。

⑥得出实际问题的相关结论。

13.【参考答案】

数学学习评价的形式多样,主要有口头测验、书面测验、开放式问题研究、活动报告、课堂观察、课后访谈、课内外作业、建立成长记录袋等。下面列举几种不同的评价方式进行阐述。

①口头测验,是指在教学过程中教师通过与学生之间的言语互动,及时地了解学生的数学学习情况,找出问题并及时纠正。

②书面测验,是指教师对学生的作业或者其他测验报告所做的书面性的评价。这种评价方式可以帮助教师了解学生的数学学习状态以及知识掌握水平。

③书面评语评价,教师对学生的作业或者其他活动报告所做的书面性的评价。评价形式不仅仅是分数或者等级,评语一般以鼓励为主,用以帮助学生认识与解决问题。

④课后访谈,是指教师通过课后与学生的沟通交流了解学生数学学习情况的一种评价方式。这种评价方式可以帮助教师更直接地了解学生的数学学习情况。

⑤建立成长记录袋,是指将学生数学学习过程进行有效记录而形成的书面存档。这种评价方式既可以帮助师生随时了解学生数学学习的成长经历,也可以有效地帮助学生确立今后的学习目标与方向。

三、解答题

14.【参考答案】

(1)证明:设 $P(x_p, y_p), Q(x_q, y_q)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上任意的两点,则 $T(P)=T((x_p, y_p))=(\frac{1}{2}x_p, \frac{1}{3}y_p), T(Q)=T((x_q, y_q))=(\frac{1}{2}x_q, \frac{1}{3}y_q)$ 。 $d(T(P), T(Q))=\sqrt{(\frac{1}{2}x_p - \frac{1}{2}x_q)^2 + (\frac{1}{3}y_p - \frac{1}{3}y_q)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x_p - x_q)^2 + \frac{1}{9}(y_p - y_q)^2} \leq \sqrt{\frac{1}{4}(x_p - x_q)^2 + \frac{1}{4}(y_p - y_q)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} = \frac{1}{2}d(P, Q)$, 即存在满足题意的 $\rho = \frac{1}{2}$, 所以映射 T 是压缩映射。

(2)(方法一)设 $O(0, 0)$ 为欧氏平面的原点。当 P_0 是原点时,显然 $P_n(0, 0)$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O$ 。当 P_0 不是原点时,因为 $T(O)=O$, 依据(1)中的计算,有 $d(P_n, O) \leq \frac{1}{2}d(P_{n-1}, O)$, 记 $d(P_n, O)=r(r>0)$, 则 $d(P_n, O) \leq (\frac{1}{2})^n r$ 。对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = \log_2 \frac{r}{\varepsilon}$, 当 $n > N$ 时,有 $d(P_n, O) \leq (\frac{1}{2})^n r < \varepsilon$, 所以由柯西准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O$ 。综上有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O$ 。

(方法二)由于 $P_n = T(P_{n-1}) = T(T(P_{n-2})) = \cdots = T^n(P_0) = (\frac{1}{2^n}x_0, \frac{1}{3^n}y_0)$,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}x_0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}y_0 = 0$, 所以点列 $\{P_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (0, 0)$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

函数是中学数学课程的主线,它贯穿于整个中学数学课程中,方程、不等式、数列等内容均与函数有非常密切的联系。

①函数与方程。中学数学课程中一元二次方程的求解问题,可以转化成求对应函数的零点问题。例如,求方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的实数根,可以转化为求函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标的值,即求函数的零点问

题。由此可以看出,方程可看作函数的局部性质,求方程的根就变成了思考函数图形与 x 轴的交点问题。利用函数的整体性质可以研究方程的根的性质,判断根的个数,并估计根所在的区间。

②函数与不等式。用函数的观点看,不等式的解集就是使函数图像 $y=f(x)$ 在 x 轴上方或下方的 x 的区域。中学数学课程中的一元二次不等式的求解问题,可以借助二次函数的图像找到不等式的解集。例如,求不等式 $x^2-3x+2>0$ 的解集,可以通过画出函数 $f(x)=x^2-3x+2$ 的图像找到使函数值大于0的所有 x 组成的集合,而这个集合就是该不等式的解集。

③函数与数列。数列是一种特殊的函数,它的定义域为自然数集或自然数子集。数列是离散的函数,表现在坐标系中是一些离散的点的集合。中学数学课程主要涉及等差数列和等比数列,等差数列的通项公式是一次函数的离散化,等差数列的前 n 项和公式是二次函数的离散化,等比数列的通项公式以及前 n 项和公式都是指数函数的离散化,因此可以借助函数的性质来研究数列。例如,求等差数列的前 n 项和 $S_n=n^2-4n$ 在第几项取得最小值,可以将其转化为求函数 $f(x)=x^2-4x$ 的顶点横坐标问题,根据函数的顶点坐标公式可知,当 $x=2$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值,即 S_n 在第2项取得最小值。

总之,在方程、不等式、数列等内容中,可以用函数思想思考、解决问题,用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)甲教师的教学在落实课标这一理念的过程中缺乏对实际情况的应急应变,并且其为引导学生思考而设置的问题目的性不强。在教学过程中,甲教师组织学生进行小组讨论,这体现了教师的组织者角色,但在学生讨论例题的过程中,甲教师没有设置铺垫问题,也没有做进一步的引导,所以甲教师在身为组织者和引导者方面存在不足。此外,当学生讨论的结论与自己预设的不同时,甲教师虽然意识到学生进入了思维误区并及时中止了学生的思考,但是其中止之后并没有设计教学问题以引导学生走出思维误区,只是一味地批评学生的错误思路,从而导致第二次终止讨论,所以甲教师在身为合作者和引导者方面存在不足。

乙教师的教学在落实课标这一理念的过程中虽然其引导者的作用得到了充分的体现,但是学生主体地位的体现有些缺失,教师的合作者以及组织者的角色落实不到位。在教学过程中,乙教师能够引导学生对问题进行分析,进而带领学生突破知识的难点,这体现了乙教师的引导者角色,但乙教师的讲解过于详细,从而限制了学生的思维,所以没有很好地体现以学生为主体的课标要求。此外,在学生讨论的过程中,乙教师既没有做好明确的分组,也没有进行巡视指导并参与到学生的讨论中去,所以乙教师在身为组织者与合作者方面存在不足。

(2)甲教师存在的问题:①讨论的问题对于学生来说有一定的难度,需要教师给予一定的引导或问题铺垫,如对最短路线的探讨,何为最短路线,蚂蚁爬过的路径如何进行计算等等。②在学生探究之初仅仅因为与教学预设不符就开始质疑学生,中止讨论,并且当发现学生错误太多时终止思考,这些行为都反映出该教师对于课堂的一些突发情况缺乏应急应变能力。③该教师既没有让学生在讨论探索中去发现问题,也没有做到充分的引导,因此没有真正落实课标提出的以学生为主体的要求,造成了“伪探究”的现象。④该教师在教学过程中的措辞不当,如“画图有什么用”等。这显得教师不够尊重学生,没有平等地对待学生。而在探究学习过程中,教师要成为学生中的参与者,与学生一起体会曲折的学习过程,感受学习中遇到的失败和成功的喜悦。

乙教师存在的问题:乙教师在教学过程中的引导过多,从而导致学生被动地接受结果,失去了学生自主探究的真正意义,没有让学生的思维得到充分的发展。

两位教师的教学活动虽然设置的是探究活动,但都忽略了探究活动是为了发展学生的综合应用的能力。两位教师都只注重知识结果的呈现,而忽视了数学方法的呈现,学生在活动中的体验,对学生学情的思考以及学生思维的发展。

(3)组织数学探究活动,需要注意以下几点事项:

①探究活动内容要选择合理。要使探究活动更有效,需要发现和提出有意义的数学问题,同时探究内容要有激发性,也就是说,探究的问题能激发学生的探究欲望,问题的设置要在学生的“最近发展区”。

②探究活动的指导要合理。在探究活动中,教师要扮演好组织者、引导者、合作者的角色。首先要给学生创

设探究的情境,其次要保证学生有探究的时间,再次探究活动并不是让学生毫无节制地大谈论,而是精心编制的教学活动。所以教师不能孤立于学生之外,要及时进行指导,并对学生的探究结果做出合理的评价。

③在探究活动中,正确处理教师的“引”和学生的“探”的关系。在探究过程中,学生作为探究的主体,需要通过自己的探究去发现新事物。教师作为引导者要发挥指向灯的作用,既要在学生脱离主题的时候,适时地引导方向,又不能过分地牵制学生的思想,造成“伪探究”的现象,还要注重全体参与,让每个学生体验成功的乐趣。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)例 1 的教学目标

知识与技能目标:检验学生对数字的敏感度,使其掌握必需的独立探究和发现问题的能力。

过程与方法目标:通过计算并观察结果与乘数的关系从中发现规律,提升学生自主学习能力、独立思考能力,培养学生发现问题和分析问题的能力。

情感、态度与价值观目标:在探索学习的过程中,让学生感受该乘法运算中的有趣规律,发展其对数学学习的兴趣,树立学习数学的信心。

例 2 的教学目标

知识与技能目标:初步了解证明方法,掌握公式证明的思维过程,学会通过一般性的证明来验证自己发现的规律。

过程与方法目标:通过让学生体验从数值运算到符号公式表达的过程,使其感受数学证明中从特殊到一般的过程,从而形成数学思维,并培养其提出问题,分析问题和解决问题的能力。

情感、态度与价值观目标:在证明规律的过程中,使学生感悟数学的严谨性,增加其学习数学的兴趣。

(2)教学过程

活动一:教师让学生观察并讨论例 1 得出的运算规律,之后教师将其板书展示。

师:观察黑板上的运算规律,15,25,95 可以拆分成什么式子来表示呢?

(预设)生:15=1×10+5;25=2×10+5;95=9×10+5。(教师板书)

师:我们由此可以发现什么规律?

(预设)生:因数等于因数十位上的数字乘以 10 加 5。

师:在上述式子中,我们可以发现哪些数字是变化的,哪些又是不变的?

(预设)生:1,2,9 是变化的;10 和 5 是不变的。

师:我们知道变量可以用字母表示,如果用字母 a 来代表 1,2,9,上述式子中的 15,25,95 可以表示成什么?
(学生讨论)

(预设)生: $a \times 10 + 5 (a=1,2,9)$ 。

活动二:教师让学生分析例 1 发现的规律($15 \times 15 = 1 \times 2 \times 100 + 25$; $25 \times 25 = 2 \times 3 \times 100 + 25$; $95 \times 95 = 9 \times 10 \times 100 + 25$),并让其试着运用字母 a 进行表示。

预设学生回答: $(a \times 10 + 5)^2 = a(a+1) \times 100 + 25 (a=1,2,9)$ 。

师:我们假设 a 代表小于 10 的任意正整数,那么例 1 中乘法运算就可以一般化为一个公式,即 $(a \times 10 + 5)^2 = a(a+1) \times 100 + 25 (a=1,2,\dots,9)$ 。

师:这个公式就是我们通过分析例 1 的运算规律所得出的猜想。

(3)教学过程

活动一:教师让学生自主思考公式 $(a \times 10 + 5)^2 = a(a+1) \times 100 + 25$ 的正确性,讨论并验证猜想正确性的证明方法。

师:观察等号左边,我们可以发现什么?

(预设)生:等号左边是一个完全平方式。

活动二:教师带领学生回顾完全平方公式,即 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

师:运用完全平方公式,可以知道 $(a \times 10 + 5)^2$ 等于什么?

(预设)生: $(a \times 10 + 5)^2 = a^2 \times 100 + 2a \times 10 \times 5 + 25$ 。

师：进一步运算可以得到什么？

(预设)生： $a^2 \times 100 + 2a \times 10 \times 5 + 25 = a^2 \times 100 + a \times 100 + 25 = a(a+1) \times 100 + 25$ ($a=1, 2, \dots, 9$)。

师：我们可以看到，运算的最终结果是等号两边的式子相等，即公式得证。

(4)“推广例1所探究的规律”教学过程

师：继续观察例1中的算式，还能有什么发现呢？大家请观察每个式子中的两个因数。

预设：学生发现每个式子中的两个因数都是一样的，而且个位上的数字之和为10。

师：大家计算下面几个式子，看看能发现什么规律。

$$38 \times 32, 43 \times 47, 81 \times 89。$$

师：这些式子中的因数有什么特点吗？

教师引导学生直到学生能够答出：这些式子中的两个因数十位上的数相同，个位上的数相加等于10。

师：这三个式子的计算结果分别是 $38 \times 32 = 1216$, $43 \times 47 = 2021$, $81 \times 89 = 7209$ ，结合我们刚才得到的结论，能发现什么规律呢？

引导学生直到学生能够答出：计算结果中的后两位数是两个因数的个位上的数的乘积，前两位数是因数的十位上的数加一乘以十位上的数本身。

师：结合例1中的计算过程，请大家补全下列算式。(板书展示)

$$38 \times 32 = \underline{\hspace{2cm}} = 1216,$$

$$43 \times 47 = \underline{\hspace{2cm}} = 2021,$$

$$81 \times 89 = \underline{\hspace{2cm}} = 7209。$$

预设：经过刚才的教学，学生能够顺利补全上述算式。

师：我们用代数式怎么表示这个算式呢？

引导学生直到学生能够答出：可以用 $10a+b$ 表示其中一个因数，用 $10a+(10-b)$ 表示另一个因数，并通过观察得出猜想：

$$(10a+b)[10a+(10-b)] = a(a+1) \times 100 + b(10-b)。$$

师：这里的 a 是正整数，大家知道 b 要取什么数吗？

引导学生直到学生能够答出：小于10的正整数。

师：下面请大家用我们刚才学过的知识证明一下这个算式。

预设：教师观察学生的计算过程，并找两位学生在黑板上板演，结合学生的板演进行讲解，以深化大家的理解。

板演过程：

$$\begin{aligned} & (10a+b)[10a+(10-b)] \\ &= 100a^2 + 10a(10-b) + 10ab + b(10-b) \\ &= 100a^2 + 100a - 10ab + 10ab + b(10-b) \\ &= a(a+1) \times 100 + b(10-b) \end{aligned}$$

【练习】口算下列算式：

$$\textcircled{1} 17 \times 13; \textcircled{2} 24 \times 26; \textcircled{3} 33 \times 37; \textcircled{4} 45 \times 45; \textcircled{5} 51 \times 59。$$

师(小结)：通过这节课的学习，我们可以快速口算出两个数相乘，其中两个因数十位上的数相同，个位上的数相加等于10的算式。在学习的过程中，我们先通过一些算式找出规律，并根据这些规律归纳猜想出对应的公式，最后经过严格的证明验证我们的猜想，我们称这一过程所贯穿的思维方法为归纳推理。