

## 2021年上半年教师资格证考试《初中数学》题参考答案

**1 正确答案是：** D

解析本题考查的是空间解析几何空间平面与直线关系的相关知识。由题意可知直线的方向向量为  $s = (3, 4, 1)$ , 过定点  $(2, 11, -1)$ , 平面的法向量  $n = (3, -2, -1)$ , 因为  $s \cdot n = 3 \times 3 + 4 \times (-2) + 1 \times (-1) = 0$ , 定点  $(2, 11, -1)$  在平面上, 故直线与平面的位置关系是直线在平面内, D 项正确。故正确答案为 D

**2 正确答案是：** C

解析本题考查的是连续的一致性的相关知识。根据一致连续性定理, 如果函数在闭区间  $[a, b]$  上连续, 那么它在该区间上一致连续。因为  $f(x) = \frac{1}{x}$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 故  $f(x)$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  在内连续, 但不一致连续, 而  $[-1, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, 1] \subset (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , 故函数  $f(x)$  在  $[-1, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$  上一致连续, C 项正确。故正确答案为 C

**3 正确答案是：** C

解析本题考查的是方程的相关知识。由已知可知,  $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$ , 两边同除以  $x^2$  得  $x^2 - \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x} - 3x = (x^2 - \frac{4}{x^2}) - 3(x - \frac{2}{x}) = (x - \frac{2}{x})(x + \frac{2}{x} - 3) = 0$ , 解得  $x = \pm\sqrt{2}$ , 或  $x = 1$ ,  $x = 2$ , 因此方程的整数解为  $x = 1$ ,  $x = 2$ , 共 2 个, C 项正确。故正确答案为 C

**4 正确答案是：** A

解析本题考查的是微分的定义的相关知识。

A 项:  $\Delta y = f'(x_0)dx$  不是微分的增量公式, 故错误;

B 项:  $dy = f'(x_0)dx$  是微分的概念, 正确, 排除;

C 项:  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$  是微分的有限增量公式, 正确, 排除;

D 项:  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$  表示函数增量与微分的关系, 正确, 排除;

本题为选非题, 故正确答案为 A

**5 正确答案是：** B

解析本题考查的是等可能事件求概率的相关知识。抛掷两粒正方体骰子出现的总情况数为  $6 \times 6 = 36$  种，向上的点数和为 5 的情况有 (1, 4), (4, 1), (2, 3) (3, 2) 共 4 种情况，故点数和为 5 的概率为  $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ , B 项正确。故正确答案为 B

**6 正确答案是：** A

解析本题考查的是线性方程组的相关知识。必要性，由条件可设  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ , 则  $AB = A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_s)$ , 由题可知  $B(B \neq 0)$ , 即  $B$  为非零向量，故  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  中至少有一个非零向量。因此， $AX = 0$  有非零解，故  $r(A) < n$ , 充分性：若  $r(A) < n$ , 则  $AX = 0$  有非零解，设非零解为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ , 即  $A\beta_i = 0(i = 1, 2, 3, \dots, s)$ , 令  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)(B \neq 0)$ , A 项正确。故正确答案为 A

**7 正确答案是：** C

解析本题主要考查课标的的相关知识。本题考查位似图形的性质。两个图形位似，那么任意一对对应点到位似中心的距离之比都等于位似比，任意一组对应边都互相平行（或在一条直线上）。位似图形面积的比等于相似比的平方。位似图形对应点连线的交点是位似中心。位似图形对应线段的比等于相似比。位似图形高。周长的比都等于相似比。位似图形的对应角都相等。C 选项不正确，符合题意，C 项正确。本题为选非题，故正确答案为 C

**8 正确答案是：** B

解析本题主要考查课标的的相关知识。本题可以先利用平方差公式、完全平方公式和因式分解等将原式进行化简后，代入 X 取值，整个过程均是对运算能力的考查。B 项正确。故正确答案为 B

**9 正确答案是：**

根据题意可知，该立体图形为一个旋转椭球面，由  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  绕 X 轴旋转一周，所以所求立体图形的体积为  $V = 2 \int_0^a b^2 \pi \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2$ 。

**10 正确答案是：**

(1) 当  $x \leq 0$ ,  $f_x(x) = 0$ , 则  $X$  的分布函数, 当时  $x > 0$ ,  $f_x(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}F(x) = \int_{-\infty}^x 0dx$ ,

则  $X$  的分布函数  $F(x) = 0 + \int_0^x (\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})dx = [-e^{-\frac{x}{2}}]_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ , 综上所述,  $X$  的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

$$P(X \leq 5) = F(5) = (1 - e^{-\frac{x}{2}}) \Big|_{x=5} = 1 - e^{-\frac{5}{2}}, \quad (2)$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = e^{-\frac{5}{2}}, \text{ 所以 } Y \text{ 的分布律为 } P(Y = K) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{5}{2}}, & k = 1 \\ e^{-\frac{5}{2}}, & k = -1 \end{cases}.$$

11 正确答案是:

(1) 在空间解析几何中,  $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$  是空间内的一个平面  $\Pi_1$ , 而该平面的法向量为  $(a_{11}, a_{12}, a_{13})$ ,  $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$  是空间内的一个平面  $\Pi_2$ , 而该平面的法向量为  $(a_{21}, a_{22}, a_{23})$ ,  $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$  是空间内的一个平面 , 而该平面的法向量为  $(a_{31}, a_{32}, a_{33})$ , 而三个平面的法向量恰好构成了该线性方程组的系数矩阵, 构成一个三维空间。

(2) 平面 1 与平面 2 相交的充要条件是  $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$ , 即  $r \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2$ , 同理

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

可知, 三个面相交于一点的充要条件是  $r \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 3$ , 即线性方程组系数矩阵的行列式的值不等于 0 的几何意义为 3 个平面相交于一点

12 正确答案是:

推理是人们思维活动的过程, 是根据一个或几个已知的判断来确定一个新的判断的思维过程。在初中数学中经常使用的两种推理是: 合情推理和演绎推理。合情推理是学生经过观察、分析、比较、联想, 再进行归纳、类比, 最后提出猜想的推理, 但猜想的结果不一定是正确的, 需要进一步进行验证。这位老师引领学生探究“圆周角定理”时, 首先进行画图。测量等探究活动, 获得对圆周角和圆心角大小关系的猜想; 就是应用了合情推理。合情推理融合了学生的各种思维和活

动在其中，对于培养学生的学习兴趣，开发学生的智力，培养学生的创新能力都是非常重要的。演绎推理是从已有的事实（包括定义、公理、定理等）出发，按照规定的法则（包括逻辑和运算）证明结论。该老师在学生给出猜想后，引导学生进一步寻找证明猜想的思路并进行严格的证明；并通过几何软件对两类角的大小关系进行验证。应用演绎推理体现是数学的严谨性。两种方式相辅相成，更有利于学生掌握“圆周角定理”，达到良好的学习效果。

### 13 正确答案是：

(1) 必要性：《义务教育数学课程标准（2001年版）》中指出勇于探索的学习方式，学生的数学学习活动不应限于接收、记忆、模仿和练习。数学课堂还应倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习方式。这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程。

意义：①课堂留白符合新课程改革的要求新课程理念积极倡导自主、合作、探究的学习方式，强调把学生看作学习和发展的主体，课堂“留白”策略要恰如其分地契合新课程理念，在课堂上树立学生的主体地位，让教师充当课堂教学的配角，引导学生对所学新知进行解读、分析、消化、拓展，变学生被动接受为主动探索。

②课堂“留白”策略适应学生心理发展心理学研究表明，课堂上长时间的“满堂灌”不利于学生接受和理解所学知识，适时留出有限的空白时间，反而能舒缓学生的紧张心理，集中学生的注意力，提高思维的质量。

③课堂“留白”策略有利于增强课堂效果，在课堂教学中注重“留白”能极大地发挥学生主观能动性，激发学生积极探索，自主学习数学的兴趣，将以“教”为主变为以“学”为主。应该说在课堂中巧设“留白”，能让师生之间适时地沟通、互动，实现了将课堂中的“教”与“学”融为一体，毫无疑问地将提高课堂效果。因此在教学上要讲究课堂“留白”，教师必须要给学生留出独立思考的空间，以便激发学生的求知欲，启迪学生的思维。

### 14 正确答案是：

(1) 根据题意可知，齐次线性方程组的解空间维数为 2，即基础解系中含有的向量的个数为 2，根据基础解系中含有的向量的个数等于未知数的个数  $n$  减去系数矩阵  $A$  的秩，即

$2 = n - r(A) = 4 - r(A)$ , 所以  $r(A) = 2$ , 所以

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & -5 & a \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_4-r_1} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & a+5 \end{array} \right), \text{ 所以 } a+5 = -2, \text{ 解得 } a = -7.$$

(2) 由 (1) 知,  $a = -7$ , 所以增广矩阵

$$B=(A, b)=\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -9 & -12 & -14 \\ 1 & 3 & -5 & a & -8 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_4-r_1} \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & a+5 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_2]{r_4-r_2} |$$

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ 得到}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 - 2 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 - 2 \end{cases}, \text{ 所以基础解系为: 令 } x_3 = 1, x_4 = 0, \text{ 则 } x_1 = 2, x_2 = 1, \text{ 得}$$

$$\xi_1 = : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令  $x_3 = 0, x_4 = 1$ , 则  $x_1 = -1, x_2 = 2$ , 得

则  $x_1 = -1, x_2 = 0$ , 所以该非齐次线性方程组的通解为

$$X = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in R)$$

15 正确答案是:

运算能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力。培养运算能力有助于学生理解运算的算理，寻求合理简洁的运算途径解决问题。

数学运算能力具体表现为以下几个方面：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果。

例如：进行整式算式  $a^2 - 3 + a^4 + a^3 = ?$  的运算，首先要观察整式的特点，出现高次幂，首先想到因式分解，运用平方差公式逆过程  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  和立方差公式

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ，注意在此公式运用过程中，要掌握公式蕴涵的算理， $a$  和  $b$  可以代表任意的代数式。所以

$$\begin{aligned} a^2 - 3 + a^4 + a^3 &= a^2 - 1 + a^4 - 1 + a^3 - 1 \\ &= (a + 1)(a - 1) + (a^2 + 1)(a^2 - 1) + (a - 1)(a^2 + a + 1) \\ &= (a - 1)(a + 1 + a^3 + a^2 + a + 1 + a^2 + a + 1) = (a - 1)(3a + 3 + a^3 + 2a^2), \text{ 进而得到最后的运算结果} \end{aligned}$$

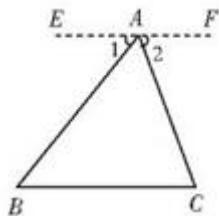
## 16 正确答案是：

(1) 从已有的知识经验出发，遵循学生的认知规律，利用实物拼图的方式引导学生通过动手实践建立知识联系，体现学生的主体性。这样的设计符合课程标准的基本要求，注重了知识的“生长点”，把本节课的知识置于整体知识的体系中，处理好了局部知识与整体知识的关系，引导学生感受数学知识整体性。

(2) 问题 1：刚才有同学把三角形的两个底角撕下来拼到顶角上，你能得到什么结论？

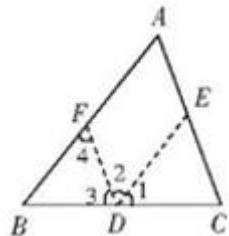
问题 2：我们发现这样可以把三角形的三个内角凑到一起，可以凑成看似是一个平角。那如何用严格的数学方法确定是平角呢？

问题 3：根据图 2，想一想如何作辅助线构造平角呢？



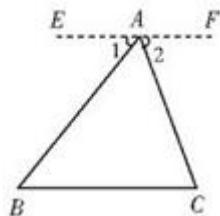
问题 4：做出辅助线后，我们根据平行线的性质，你有什么发现？

(3) 证明方法一：如图，过 BC 的中点 D 作  $DF \parallel AC$ ,  $DE \parallel AB$ , 这时  $\angle A = \angle 4$ , 又  $\angle 4 = \angle 2$ , 即  $\angle A = \angle 2$ , 由  $\angle A = \angle 2$ , 由  $\angle C = \angle 3$ ,  $\angle B = \angle 1$  知, 我们将  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  转移到了  $\angle BDC$ , 由平角的定义, 可以证到三角形的内角和  $180^\circ$ 。



证明方法二：如图，过点 A 作  $EF \parallel BC$ , 则得到  $\angle B = \angle 1$ ,  $\angle C = \angle 2$ ,

因为  $\angle 1 + \angle 2 + \angle BAC = 180^\circ$ , 所以  $\angle B + \angle C + \angle BAC = 180^\circ$ , 得证三角形的内角和  $180^\circ$ 。



17 正确答案是：

(1) 教师本着以“教师主导，学生为主”的理念，在教学之初从简单到复杂，从特殊到一般得出平方差公式。在此之后，引导学生进行猜想，组织验证。这样的教学设计使得学生不仅得到数学

结论，还感受数学结论的行程过程及蕴涵的数学思想方法。同时学生归纳概括得出猜想和规律并加以验证可以培养学生的创新意识。

(2) 平方差公式是在多项式乘法基础上学习的，是接下来学习因式分解等内容的基础性，起到承上启下的作用。在学习过程，学生经历从特殊到一般的探究过程，得到平方差公式，利用数形结合理解平方差公式，有助于学生获得基础知识，基本技能，基本思想，基本活动经验，达到良好的学习效果。

### (3) 教学目标：

**知识与技能目标：**学生知道平方差公式，理解平方差公式的推导过程，能够正确的运用平方差公式解决问题。

**过程与方法目标：**学生通过自主探究和小组讨论的学习过程，提高发现问题的能力，推理能力，体会特殊到一般的数学思想。

**情感态度与价值观目标：**通过本节课的学习，激发学习兴趣，提高数学学习自信心，体会数学的重要价值。

### 教学过程：

#### 一、复习导入

**教师活动：**教师运用多媒体展示一系列问题。接着引导学生认真观察和思考，提出问题：PPT 上的多项式乘积结果为多少？

**学生活动：**就教师的提问展开独立思考或讨论得出结论。

**教师活动：**根据学生得出的回答，教师给予相应评价，并提出某些特殊的多项式相乘，就可以写成公式的形式，从而引入本节课新课——平方差公式。

#### 二、新课讲授

##### 1. 初步感知，以旧引新

**教师活动：**教师提出通过多媒体展示

$2^2 - 1 = 3 = (2 + 1)(2 - 1); 3^2 - 1 = 8 = (3 + 1)(3 - 1); 4^2 - 1 = 15 = (4 + 1)(4 - 1)$  等一系列式子。提出观察以上式子，你能发现什么规律？教师组织学生根据目标问题四人小组讨论

或同桌之间交流，教师进行巡视指导，交流讨论结束后，找学生代表回答讨论结果，教师评价，学生互评或学生自评。

学生活动：根据问题探究出结论或预设： $a^2 - 1^2 = (a + 1)(a - 1)$ 。

## 2. 自主探究，得出结论

教师活动：教师再次抛出问题上面等式中的1换成其它的数字时，等式是否也成立？给予一定的时间，组织学生思考抢答或自主探究再回答，教师针对学生的回答结果作相应评价或选择学生自评或互评。

学生活动：通过自主探究，学生回答出

$$2^2 - 2^2 = 0 = (2 + 2)(2 - 2); 3^2 - 2^2 = 5 = (3 + 2)(3 - 2); 4^2 - 2^2 = 12 = (4 + 2)(4 - 2)$$

，所以可以猜想 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 。根据多项式乘法公式可以验证，

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \text{ 所以 } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)。$$

## 3. 总结归纳，知识应用

教师活动：教师梳理和总结本节新课的重难点：平方差公式为 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 。

## 三、巩固练习。

教师活动：教师通过多媒体展示有关平方差公式不同类型不同层次的练习题目，引导学生独自思考并作答，或者找同学代表到黑板上进行板演，完成后教师针对结果给予评价并总结。

学生活动：学生进行相关练习。

## 四、归纳小结。

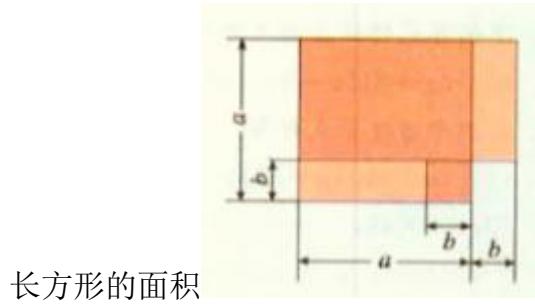
教师活动：教师引导学生可以从知识方面，能力方面或情感等方面畅谈本节课的收获，针对学生的回答，相机评价并总结。

学生活动：学生畅谈本节课的体会。

## 五、作业布置

学生完成书后剩余练习题或者自主设计一道能用本节课知识解决的生活实际问题。

(4)如图所示,边长为  $a$  的大正方形减去边长为  $b$  的小正方形的面积等于长为  $(a + b)$ , 宽为  $(a - b)$



长方形的面积