

2021 年下半年教师资格证考试《初中数学》题参考答案及解析

1 解析

本题主要考查极限的相关知识。

由题 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+3+3^2+\dots+3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1-3^n}{1-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3^n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3^n \ln 3} = 0$ 。A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A。

2 解析

本题主要考查圆的相关知识。

由题 $x^2 + y^2 - 6x + 16y - 48 = 0$ ，配方得 $(x-3)^2 + (y+8)^2 = 121$ ，因此 A 点在以 $(3, -8)$ 为圆心，11 为半径的圆上运动； $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 44 = 0$ ，配方得 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 64$ ，因此 B 点在以 $(-2, 4)$ 为圆心，8 为半径的圆上运动；圆心距 $d = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + [-8 - 4]^2} = 13$ ，因此两个圆相交，则 AB 两点间的最大距离为 $13 + 11 + 8 = 32$ 。B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B。

3 解析

本题主要考查行列式的相关知识。

由题 $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0$ ，解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$ 。A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A。

4 解析

本题主要考查极限的相关知识。

由题 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ ， $f(0) = 1$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = f(0)$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \neq f(0)$ ，因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处左连续但右不连续。B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B。

5 解析

本题主要考查矩阵的相关知识。

$$B = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } |B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 3 \times 2 + 2 \times 3 \times 1 + 1 \times 1 \times 0) - (1 \times 3 \times 1 + 1 \times 3 \times 1 + 2 \times 2 \times 0) = 6, \text{ 因此 } |B| = 6|A| = 12.$$

C 项正确。

A、B、D 三项：与题干相符，排除。

故正确答案为 C。

6 解析

本题主要考查概率的相关知识。

由题得 A 不发生的概率为 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, B 不发生的概率为 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, 所以 A、B 同时不发生的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ 。A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A。

7 解析

本题主要考查数学史的相关知识。

由题，秦九韶在著作《数书九章》中提出了大衍求一术。C 项正确。

A、B、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 C。

8 解析

本题主要考查尺规作图的相关知识。

由题，作任意角的三等分线不能通过尺规作图得到。D 项正确。

A、B、C 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 D。

9 正确答案是：

由题，
$$= x \ln 2x \Big|_1^5 - \int_1^5 \frac{1}{x} \cdot x dx = 5 \ln 10 - \ln 2 - 4。$$

10 正确答案是：

(1) 设 $P(x, y, z)$ ，由题 $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = \frac{1}{2}|z-4|$ ，化简得 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1。$

(2) 轨迹 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1$ 所表示的几何图形为椭球面。

11 正确答案是：

(1) 由题，两次摸球的标号之和为 3 的事件为 $(1, 2)$ 、 $(2, 1)$ ，事件数为 2，总的事件数为 $10 \times 10 = 100$ ，故概率 $P = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}。$

(2) 由题，两次摸球的标号之和最大为 7 的事件数有 $(1, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(1, 4)$ 、 $(1, 5)$ 、 $(1, 6)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(2, 5)$ 、 $(3, 1)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(3, 3)$ 、 $(3, 4)$ 、 $(4, 1)$ 、 $(4, 2)$ 、 $(4, 3)$ 、 $(5, 1)$ 、 $(5, 2)$ 、 $(6, 1)$ ，共 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ 种，故 $P = \frac{21}{100}。$

12 正确答案是：

(1) 直接开平方法

用直接开平方法解形如 $(x-m)^2 = n^2$ ($n \geq 0$) 的方程，其解是 $x = m \pm n$ 。它的特征是左边是一个关于未知数的完全平方式，右边是一个非负数。

(2) 配方法

将给定的一元二次方程配成完全平方的形式来解一元二次方程的方法，叫做配方法。

用配方法解一元二次方程的步骤：

①一移：移项，将常数项移到等号右边，含有未知数的项移到等号左边；

②二化：二次项系数化为 1，左右两边同时除以二次项系数；

③三配：配方，左右两边同时加上一次项系数一半的平方，写成完全平方式的形式；

④四开：开平方求根。

例如：通过把一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 配方，变形为 $a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ，再开平方。

(3) 公式法

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，我们把式子 $b^2 - 4ac$ 叫做根的判别式，通常用希腊字母“ Δ ”表示，即 $\Delta = b^2 - 4ac$ 。

当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，方程的解为 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ；当时 $b^2 - 4ac < 0$ 时，方程无实数解。

(4) 因式分解法

①概念：先因式分解，使一元二次方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式，再使这两个一次式分别等于 0，从而实现降次。这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法。

②用因式分解法解一元二次方程的一般步骤：

a. 将方程等号右边化为 0；

b. 将方程左边化为两个一次式的乘积；

c. 令每个一次式分别为 0，得到两个一元一次方程；

d. 解这两个一元一次方程，它们的解就是一元二次方程的解。

注：四选三即可。

13 正确答案是：

①数据分析是指了解在现实生活中有许多问题应当先做调查研究，收集数据，通过分析作出判断，体会数据中蕴含着的信息；了解对于同样的数据可以有多种分析方法，需要根据问题的背景选择

合适的方法；通过数据分析体验随机性，一方面对于同样的事情每次收集到的数据可能不同，另一方面只要有足够的数据就可能从中发现规律。主要过程包括收集、整理、描述和分析。

②描述数据集中趋势的统计量有平均数、中位数、众数。

③描述数据离散程度的统计量有极差、方差、标准差。

注：以上统计量分别选取两个即可。

14 正确答案是：

(1) 令

$$\begin{aligned}
 A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{显然 } R(A) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3, \text{秩等于向量的个数, 则 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{线性无关。}
 \end{aligned}$$

(2) 令

$$\begin{aligned}
 B = (A, b) &= R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma), \text{显然 } \gamma = -\frac{5}{2}\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3, \text{初等变换不改变线性关系, 故 } \beta = -\frac{5}{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3.
 \end{aligned}$$

15 正确答案是：

(1) 不等式的性质（选取两条即可）

性质 1：不等式两边同时加或减去同一个整式，不等号方向不变。

性质 2：不等式两边同时乘（或除以）同一个大于 0 的整式，不等号方向不变。

性质 3：不等式两边同时乘（或除以）同一个小于 0 的整式，不等号方向改变。

(2) 需要利用不等式的性质去解一元一次不等式，性质 1 可以用于解决解不等式中的移项问题，性质 2、3 可以解决不等式中的系数化 1 问题。

如：解不等式 $-2x + 4 > 9$

第一步先利用不等式的性质 1，左右两边同时减 4，得到 $-2x > 5$ ；

第二步利用不等式性质 3，左右两边除以 -2，不等号方向要改变，得到 $x < -\frac{5}{2}$ 。
16 正确答案是：

(1) 在正方形中点 A、C 关于对角线对称，所以 $PE + PC = PE + AP$ ，所以当且仅当 A、P、E 三点共

线时有最小值，在 $Rt\triangle ABE$ 中， $AE = \sqrt{3^2 + (\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ ，故 $(PE + PC)_{min} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ ，要求 BP

的长度，连接 AE 并延长，与 DC 的延长线交于点 F，由已知可得 $\triangle APB \sim \triangle FPD$ ，所以

$\frac{BP}{DP} = \frac{AB}{FD}$ ，又因为 $\triangle ABE \cong \triangle FCE$ ，所以 $FC = AB$ ，所以 $\frac{AB}{FD} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{BP}{DP} = \frac{1}{2}$ ，所以 $BP = \frac{1}{3}BD$ ，因为 $BD = 3\sqrt{2}$ ，所以 $BP = \sqrt{2}$ 。

(2) 合理：①启发过程能够以本节课的重点难点为核心，帮助学生突破本节课的问题。

②能够从以学生已有的知识出发，引导思考，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能，体会和运用数学思想与方法，获得基本的数学活动经验。

不足：①教学活动应是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的数学教学活动是教师教与学生学的统一，应体现“以人为本”的理念，促进学生的全面发展。但是启发过程中，侧重于教师讲解，缺少学生的自主思考。

②教师应成为学生學習活动的组织者、引导者、合作者，为学生的发展提供良好的环境和条件。启发过程中没有体现出一名合格的引导者的角色。

③教师应该根据不同学段的学生的年龄特征和认知水平，根据学段目标，合理设计课程，启发过程中没有体现教师的因材施教。

17 正确答案是：

(1) 首先其中蕴含的主要数学思想是数形结合思想。从绝对值的引出距离的表示可以看出使用了数形结合思想；其次是分类讨论思想，在用符号表示的过程中，需要讨论 a 的大小进而判断出对应符号，这里的数 a 可以是正数、负数或0；最后蕴含特殊化思想，在用字母表示的绝对值的符号的过程中，可使用特殊值的方法判断符号。

(2) 一、教学目标

知识与技能：理解绝对值的概念，掌握绝对值的求法，能正确利用绝对值的公式进行计算。

过程与方法：通过自主探究、小组合作、归纳总结，提高学生的抽象概括能力和数学运算能力。

情感态度与价值观：感受数学与生活的密切联系，在数学学习活动中获得成功的体验。锻炼克服困难的意志，建立自信心。积极参与数学活动，提高对数学的好奇心和求知欲。

二、教学重点

教学重点：掌握绝对值的计算公式，会解决求绝对值的问题。

三、教学过程

(一) 导入新课

教师活动：教师利用问题情境，提出：回忆一下什么是数轴，什么是相反数？

学生活动：学生思考后作出相应回答“在数学中，规定了原点，正方向，单位长度的直线叫作数轴，只有符号不同的两个数叫作相反数。”

教师活动：教师根据学生的回答提出疑问：相反数之间还有其他关系吗？从而顺势引出课题——绝对值。

设计意图：通过复习回顾能很好地将新旧知识联系起来，有利于学生形成对知识的系统认识。并且由旧知开始，能很好地帮助学生克服畏难情绪。

(二) 讲授新课

教师活动：为了探究绝对值的意义，教师多媒体展示课本中的情境，并提出问题：两车的行驶路线相同吗？行驶路程相同吗？并引导学生进行小组讨论，讨论结束后，请小组代表回答讨论结果。

学生活动：根据教师的问题，进行小组讨论，讨论结束后由小组代表汇报讨论结果：路线不同但路程相同。

教师活动：学生讨论结束之后，教师根据学生讨论结果进一步提出问题：如果我们将这条线看成数轴，那距离的大小与方向有关系吗？引导学生进行自主探究。

学生活动：根据教师的提示，学生利用已有知识进行自主探究，最终能够发现：距离只和大小有关，与方向无关。

教师活动：根据学生归纳的特点，教师板书绝对值的定义以及写法，并提出问题：一个数的绝对值和它的符号有关吗？

学生活动：通过小组合作，举例验证得到一个数的绝对值和它的符号无关。

教师活动：根据绝对值的定义，师生总结得出：正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0。

教师活动：总结学生的回答，并用字母进行表示。

设计意图：通过小组讨论、自主探究的学习方法，提升了学生的团队协作及语言表达能力，更加直观地经历了新知识的形成过程，更好地掌握本节课的重难点，同时通过教师引导，充分体现了以学生为主体的教学理念。

（三）巩固提高

教师活动：教师借助 *PPT* 展示几道题目：

$|1| = \underline{\quad}$ ； $|-9| = \underline{\quad}$ ； $|5|$ 是否等于 $|-5|$ ；

学生活动：根据所学知识计算相应题目。

设计意图：通过题目的练习，加深学生对本节课所学知识的理解和运用，通过及时的提问，教师也能发现学生在学习过程中的问题，因材施教，达到更好的学习效果。

（四）课堂小结

教师活动：根据今天所学内容提出问题：通过本节课的学习大家都有哪些收获？

学生活动：根据老师提出的问题，进行本节课重难点的总结，本节课主要学习了绝对值的含义及计算方法。

设计意图：在总结环节，学生通过自我总结和梳理，对于本节课所学的内容有了整体的认知，便于学生形成本节课的知识框架和网络。

（五）布置作业

根据本节课的所讲内容，设置必做题和选做题两种类型。从而满足不同层次学生的需求，达到分层教学目的，增强学生对所学知识的理解和掌握。

设计意图：通过课后作业的布置，使得学生对课上所学的知识得以巩固和运用，不仅能够达到复习的目的，同时也可以培养学生终身学习的意识，感受数学与生活的联系，体会学习数学的乐趣。