

6. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$ 的收敛域为()。

A. $(-3, 3)$

B. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

C. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

D. $[-3, 3]$

7. 20 世纪初对国际数学教育产生重要影响的是()。

A. 贝利 - 克莱因运动

B. 大众教学

C. 新数学运动

D. PISA 项目

8. 《普通高中数学课程标准(实验)》提出了五种基本能力,其中不包括()。

A. 抽象概括

B. 推理论证

C. 观察操作

D. 数据处理

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 一束光线斜射在一水平放置的平面镜上,入射角为 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$),请建立空间直角坐标系,并求出反射光线的方程。若将反射光线绕平面镜的法线旋转一周,求所得的旋转曲面的方程。

10. 求证:非齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 有唯一解,当且仅当向量 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ 线性无关。

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ 线性无关。

11. 某飞行表演大队由甲、乙两队组成。甲队中恰好有喷红色与绿色烟雾的飞机各 3 架。乙队中仅有 3 架喷红色烟雾的飞机。在一次飞行表演中,需要从甲队中任意选出 3 架飞机与乙队飞机混合编队进行表演,并任意确定一架飞机作为领飞飞机,求领飞飞机是喷绿色烟雾飞机的概率。



视频讲解

12. 阐述确定数学课程内容的依据。



视频讲解

13. 举例说明向量内容的学习对高中生理解数学运算的作用。



视频讲解

三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 叙述并证明拉格朗日微分中值定理,并简述拉格朗日微分中值定理与中学数学内容的联系。



视频讲解

四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. 叙述“严谨性与量力性相结合”数学教学原则的内涵,并以“ $\sqrt{2}$ 是无理数”的教学过程为例,说明在教学中如何体现该教学原则。



视频讲解

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分)

16. 阅读案例,并回答问题。

在“三角函数求值”的教学中,教师给出了如下的问题。

已知 α, β 为锐角, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, 求 $\cos \beta$ 的值。

教师让两位学生板演,他(她)们的板演过程如下:

生 1: 因为 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, α 是锐角, 所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

又因为 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha + \beta < \pi$, 所以 $\cos(\alpha + \beta) = \pm \frac{4}{5}$ 。

当 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$ 时, $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha = \frac{4}{5} \times$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{10\sqrt{5}}{25} = \frac{2\sqrt{5}}{5}。$$

当 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$ 时, $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha =$

$$-\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{25}。$$

生 2: 因为 $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, α 是锐角, 所以 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

由 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, 即 $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}$,

设 $\cos\beta = x$, 因为 β 是锐角, 所以 $\sin\beta = \sqrt{1-x^2}$,

则 $\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{5}$, 去分母, $2\sqrt{5}x + \sqrt{5} \cdot \sqrt{1-x^2} = 3$,

移项, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{1-x^2} = 3 - 2\sqrt{5}x$, 两边平方, $5 - 5x^2 = 9 - 12\sqrt{5}x + 20x^2$,

合并同类项, $25x^2 - 12\sqrt{5}x + 4 = 0$, 解方程得 $x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{25}$, $x_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

教师发现两位学生板演的内容与自己预设的内容不一致。

问题: (1) 你如何评价这两位学生的解题过程; (10 分)

(2) 假如你是该教师, 针对学生板演的情况, 如何组织进一步的教学, 完成该题的教学任务? (10 分)



视频讲解

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17. “基本不等式”是高中数学教学中的重要内容,请完成下列任务:

(1) 在“基本不等式”起始课的“教学重点”设计中,有两种方案:

① 强调基本不等式在求数值中的应用,将基本不等式的应用作为重点。

② 强调基本不等式的背景、过程与意义,将学生感受和体验“基本不等式”中“基本”的意义作为教学重点。

你赞同哪种方案? 简述理由;(10 分)

(2) 给出 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 以及 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a > 0, b > 0)$ 的几何解释;(10 分)

(3) 为了让高中生充分认识“基本不等式”中“基本”的意义,作为教师应该对此有多个维度的理解,请至少从两个维度谈谈你对“基本”意义的认识。(10 分)



视频讲解