

2021年上半年教师资格证考试《高中数学》题

一. 单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。

1. 在空间直角坐标系下，直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y-11}{4} = \frac{z+1}{1}$ 与平面 $3x - 2y - z + 5 = 0$ 的位置关系是（ ）。
A. 相交且垂直 B. 相交不垂直 C. 平行 D. 直线在平面上
2. 使得函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 一致连续的 x 取值范围是（ ）。
A. $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{3}{2}, 3]$
B. $(-\infty, 1)$
C. $(1, +\infty)$
D. $(-\infty, +\infty)$
3. 方程 $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$ 的整数解的个数是（ ）。
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
4. 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的自变量的改变量为 Δx ，相应的函数改变量为 Δy ， $o(\Delta x)$ 表示 Δx 的高阶无穷小。若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 可微，则下列表述不正确的是（ ）。
A. $dy = f'(x_0)dx$
B. $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$
C. $\Delta y = f'(x_0)dx$
D. $\Delta y = dy + o(\Delta x)$
5. 抛掷两粒正方体骰子（每个面上的点数分别为1, 2, ..., 6），假定每个面朝上的可能性相同，观察向上的点数，则点数之和等于5的概率为（ ）。
A. $\frac{15}{36}$
B. $\frac{1}{9}$
C. $\frac{1}{12}$
D. $\frac{1}{18}$
6. 对于 $m \times n$ 矩阵 A ，存在 $n \times s$ 矩阵 $B (B \neq 0)$ ，使得 $AB = 0$ 成立的充要条件是矩阵 A 的秩 $\text{rank}(A)$ 满足（ ）。
A. $\text{rank}(A) \leq n$
B. $\text{rank}(A) < n$
C. $\text{rank}(A) \geq n$
D. $\text{rank}(A) > n$
7. 《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》中明确提出的数学核心素养不包括（ ）。
A. 数据分析 B. 直观想象 C. 数学抽象 D. 合情推理
8. 下列函数： $f(x) = \pi^x$ ， $g(x) = e^x - \ln x^2$ ， $h(x) = x^\pi + \tan x$ ， $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 其中初等函数的个数是（ ）。
A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

二. 简答题：本大题共5小题，每小题7分，共35分

9. （论述题）已知三维空间中的两点 A, B ，其距离为 $2C$ ，求到 A, B 两点距离之和等于 $2a (0 < c < a)$ 的点围成的立体图形的体积。（7分）

2021年上半年教师资格证考试《高中数学》题

10. (论述题)

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设顾客在某银行窗口等待服务的时间 $X(\text{min})$ 的概率密度为
客对银行服务质量的评价值，若顾客等待时间不超过 $5(\text{min})$ ，则评价值为 $Y = 1$ ；否则，评价值为 $Y = -1$ ，即

$$Y = \begin{cases} -1, & X > 5 \\ 1, & X \leq 5 \end{cases}$$

(1) 求 X 的分布函数；(4分)

(2) 求 Y 的分布律。(3分)

11. (论述题)

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \text{①}$$

已知方程组

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{②}$$

有唯一解当且仅当行列式不等于零。请回答下列问题：

(1) 行列式②的几何意义是什么？(3分)

(2) 上述结论的几何意义是什么？(4分)

12. (论述题) 数学课堂教学过程中，为了鼓励学生独立思考、深入理解问题，教师常常在呈现任务后，不是立刻讲解，而是留给学生足够的思考时间，这种教学方式可称之为“课堂留白”，请谈谈课堂留白的必要性及其意义。(7分)

13. (论述题) 给出指数函数模型的两个实际背景，分别写出其对应的函数解析式，并简述指数函数模型的特点。(7分)

三. 解答题：本大题1小题，共10分。

14. (论述题)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 12x_4 = -14 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + ax_4 = -8 \end{cases}$$

已知非齐次线性方程组

(1) a 为何值时，其对应齐次线性方程组解空间的维数为2？(5分)

(2) 对于(1)中确定的 a 值，求该非齐次线性方程组的通解。(5分)

四. 论述题：本大题1小题，共15分。

15. (论述题) 数学运算能力是中学数学教学需要培养的基本能力，学生的数学运算能力具体表现为哪些方面？请以整式运算为例予以说明。(15分)

五. 案例分析题：本大题共1题，共20分。

(一)

案例：在学习了“基本不等式”后，教师要求学生解决如下问题：设 x 、 y 均为正数，且满足 $x + 2y = 1$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值。

一位学生给出的解法如下：

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}, \quad \text{①}$$

因为 x 、 y 均为正数，所以

$$2\sqrt{2xy} \leq x + 2y = 1 \quad \text{②}$$

2021年上半年教师资格证考试《高中数学》题

由②得， $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ③

结合①③得， $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \geq 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ，

从而 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$ 。

16. (分析题) (1) 指出上述解答的错误之处，分析错误原因，并给出正确解法；
(2) 简述求二元函数最值的一般解法有哪些。

六. 教学设计题：本大题共1题，共30分。

(二)

“等比数列前n项和公式”是普通高中数学教学的重要内容，请完成下列任务。

17. (分析题) (1) 设计一组问题，说明学习“等比数列前n项和公式”的重要性；(10分)
(2) 写出等比数列前n项和公式，并给出两种不同的推导方法；(10分)
(3) 针对(2)中的一种推导方法写出教学过程。(10分)