

2021年下半年教师资格证考试《高中数学》题

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩是（ ）。
- A.1 B.2 C.3 D.4
2. 已知向量 $\vec{a} = i - 2j + 3k$, $\vec{b} = 2i + 3j - 3k$, 则 $\vec{a}(-3\vec{b})$ 的值是（ ）。
- A.-39 B.-13 C.13 D.39
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^2 \sin \frac{1}{2n^2}$ 的值是（ ）。
- A. 0 B.1 C.2 D. ∞
4. 已知一条曲线 $y = \int_0^x e^{t^2} dt$ 的一条切线与直线 $x+y-3=0$ 垂直, 则该切线方程是（ ）。
- A. $y=-x$
B. $y=x$
C. $y=-x+e$
D. $y=x+e$
5. 在空间直角坐标系中, 将椭圆 $\begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 转一周, 所得旋转曲面的方程是（ ）。
- A. $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$
B. $x^2 - y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$
C. $\frac{x^2}{9} - y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$
D. $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$
6. 已知属于不同特征值的特征向量线性无关, 若 λ_1 、 λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值。所对特征向量分别是 $\vec{\alpha}_1$ 、 $\vec{\alpha}_2$, 则向量 $\vec{\alpha}_1$ 与 $A(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是（ ）。
- A. $\lambda_1 \neq 0$
B. $\lambda_2 \neq 0$
C. $\lambda_1 = 0$
D. $\lambda_2 = 0$
7. 第十四届国际数学教育大会 (ICME-14) 于2021年7月在中国上海举行, ICME-14的会标如图1所示, 其中没有涉及的数学元素是（ ）。

2021年下半年教师资格证考试《高中数学》题

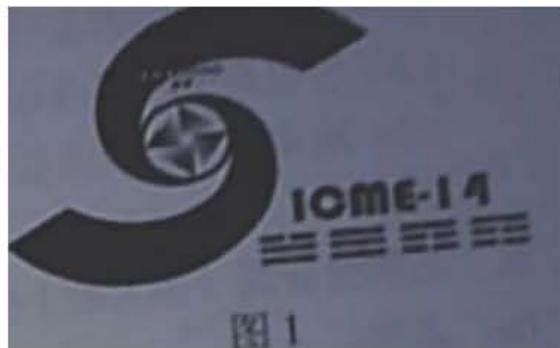


图 1

- A. 旋转变换 B. 勾股弦图 C. 杨辉三角图 D. 数字进位制
 8. 高中数学教学中的周期函数是（ ）。
 A. 反三角函数 B. 三角函数 C. 对数函数 D. 指数函数

二. 简答题：本大题共5小题，每小题7分，共35分

9. (论述题)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix}$$

已知向量 $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2)^T$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 3, 1)^T$, $\vec{\alpha}_3 = (2, 1, k)^T$, 且行列式(1) 若行列式 $A = 0$, 求 k 的值。(2) 当行列式 $A = 0$ 时, 将向量 $\vec{\alpha}_3$ 表示为 $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ 的线性组合。10. (论述题) 求由 $y = \arctan x$ 与直线 $y = x$, $x = 2$ 所围成平面区域的面积。11. (论述题) 甲乙两人进行射击比赛, 各射击3次, 击中次数多者获胜。假设他们每次击中的概率均为 $\frac{1}{2}$ 。且每次射击是相互独立的。

(1) 求乙在3次射击中恰好击中1次的概率;

(2) 已知甲在3次射击中恰好击中2次, 求甲获胜的概率。

12. (论述题) 学生能够获得进一步学习以及未来发展所必须的“四基”和“四能”是普通高中数学课程的标准之一, 回答“四基”和“四能”分别是什么。

13. (论述题) 结合实例, 简述什么是简单随机抽样和分层随机抽样。

三. 解答题：本大题1小题，共10分。14. (论述题) 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $a < c < d < b$, $f(c) + f(d) = k$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $2f(\xi) = k$ 。**四. 论述题：本大题1小题，共15分。**

15. (论述题) 函数是中学数学的重要概念, 回答下列问题:

(1) 写出高中阶段函数的定义; (5分)

(2) 阐述高中阶段函数的定义与初中阶段函数的定义的相同点与不同点。 (10分)

五. 案例分析题：本大题共1题，共20分。**(一)**

在学习了同角三角函数的公式后, 老师给学生布置了道题目。

$$\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

求 $\tan \alpha$ 的值。

一名学生的求解过程如下：

2021年下半年教师资格证考试《高中数学》题

解：依题意和同角三角函数基本所得： $\begin{cases} \sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$ ；

消去 $\sin \alpha$ ，得 $5\cos^2 \alpha - \sqrt{5}\cos \alpha - 2 = 0$ ；

进而得 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ；

因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ；

所以 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ；

所以 $\tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}$ 或 $\tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -2$ ；

因为 $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ；

所以 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 。

16. (分析题) 问题：

- (1) 单一主观题指出这名学生在求解过程的错误；(6分)
- (2) 给出上述题目的正确解法。(6分)
- (3) 根据此题的错误之处，分析这名学生在运算和逻辑推理方面的不足。(8分)

六. 教学设计题：本大题共1题，共30分。

(二)

下面是某高中数学教材“点到直线的距离公式”一节的内容片段：

探究如图2，已知点 $P(x_0, y_0)$ ，直线 $l: Ax + By + C = 0$ ，求点 P 到直线 l 的距离？

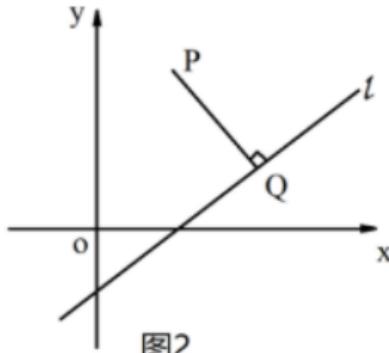


图2

点 P 到直线 l 的距离，就是从点 P 到直线 l 的垂线段 PQ 的长度，其中 Q 是垂足（图2）。因此，求出垂足 Q 的坐标，利用点到直线的距离公式求出 $|PQ|$ ，就可以得到点 P 到直线 l 的距离。

设 $A \neq 0$, $B \neq 0$ ，由 $PQ \perp l$ ，以及直线 l 的斜率为 $-\frac{A}{B}$ ，可得 l 的垂线 PQ 的斜率为 $\frac{B}{A}$ ，因此，直线 PQ 的方程为 $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$ ，即 $Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0$ 。

解方程组

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0 \end{cases}$$

得直线 l 与 PQ 的交点坐标，即垂足 Q 的坐标为：

.....

17. (分析题) 根据上述内容，完成下列任务：

- (1) 补充“点到直线的距离公式”的推导过程；(10分)
- (2) 设计这部分内容的教学目标；(8分)

2021年下半年教师资格证考试《高中数学》题

(3) 根据教学目标设计这部分内容的教学过程（含课堂导入、公式推导、巩固提高、课堂小结及设计意图）。(12分)