

# 2022 年下半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ 的值是( )。

- A. -1  
B.  $-\frac{1}{2}$   
C.  $\frac{1}{2}$   
D. 1

2. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 的间断点有( )。

- A. 0 个  
B. 1 个  
C. 2 个  
D. 无穷多个

3. 曲线 $y = 2x + e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是( )。

- A.  $y = 2x - 1$   
B.  $y = 2x + 1$   
C.  $y = 3x - 1$   
D.  $y = 3x + 1$

4. 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的秩是( )。

- A. 1  
B. 2  
C. 3  
D. 4

5. 已知 $\alpha$ 与 $\beta$ 是非零向量,则“ $\alpha \cdot \beta = 0$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的( )。

- A. 充分不必要条件  
B. 充要条件  
C. 必要不充分条件  
D. 既不充分也不必要条件

6. 将一枚质地均匀的硬币抛掷 4 次,其中有 2 次正面朝上的概率是( )。

- A.  $\frac{1}{4}$   
B.  $\frac{3}{8}$   
C.  $\frac{1}{2}$   
D.  $\frac{3}{4}$

7. “文华逾九章,拓扑公式彪史册;俊杰胜十书,机器证明誉寰球。”是对一位著名数学家成就的高度概括,这位数学家是( )。

- A. 吴文俊  
B. 苏步青  
C. 祖冲之  
D. 李善兰

8.《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》提出的数学学科核心素养不包括( )。

- A. 数学建模  
B. 数学文化  
C. 数据分析  
D. 数学运算

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 已知由方程  $e^x + xy - e^y = 1 - e$  所确定的隐函数为  $y(x)$ ,求  $y'(0)$ 。

10. 已知两点  $M_1(1, -2, 3), M_2(3, 0, -1)$ ,求垂直且平分线段  $M_1M_2$  的平面方程。

11. 甲、乙两个工厂为某公司生产一批产品,次品率分别为 2%,1%。已知甲、乙两个工厂生产的产品分别占这批产品总数的 40%,60%,公司质检员从中任意抽取一件产品。

(1) 求这件产品是次品的概率;(5 分)

(2) 若这件产品是次品,求该产品出自甲工厂的概率。(2 分)

12. 分类是一种重要的数学思想方法,简述分类的原则和学习分类的意义。

13. 结合抛掷硬币的试验,简述概率和频率的区别与联系。

三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 求线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$  的通解。

#### 四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. “几何与代数”是高中数学必修课程内容中的一个主题,该主题的内容包括立体几何、平面解析几何、平面向量、空间向量、复数,试论述:

- (1) 将“几何与代数”整体设计为一个主题的理由;(6 分)
- (2) 复数与平面向量之间的关系。(9 分)

#### 五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分) 阅读案例,并回答问题。

16. 案例:

某习题课上有这样一道习题,求函数  $y = \ln(x + 1) + \ln(x - 3)$  的单调递增区间。

某同学的解法如下:

函数  $y = \ln(x + 1) + \ln(x - 3) = \ln(x^2 - 2x - 3)$ , 由于  $y = \ln t$  是增函数,所以只需求  $t = x^2 - 2x - 3$  的单调性,因为  $t = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ , 易见该二次函数的单调递增区间为  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ 。所以函数  $y = \ln(x + 1) + \ln(x - 3)$  的单调递增区间为  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ 。

问题:

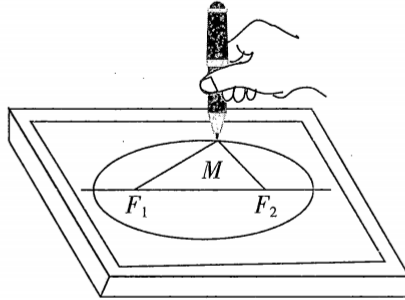
- (1) 指出这名学生在求解过程中的错误,并叙述理由;(8 分)
- (2) 给出上述题目的正确解答过程。(12 分)

## 六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17. (材料) 下面是某高中数学教材“椭圆及其标准方程”一节的内容片段:

### 探究

取一条定长的细绳, 把它的两端都固定在图板的同一点, 套上铅笔, 拉紧绳子, 移动笔尖, 这时笔尖(动点)画出的轨迹是一个圆。如果把细绳的两端拉开一段距离, 分别固定在图板的两点  $F_1, F_2$  (如图所示), 套上铅笔, 拉紧绳子, 移动笔尖, 画出的轨迹是什么曲线?



在这一过程中, 移动的笔尖(动点)满足的几何条件是什么?

把细绳的两端拉开一段距离, 移动笔尖的过程中, 细绳的长度保持不变, 即笔尖到两个定点的距离的和等于常数。

我们把平面内与两个定点  $F_1, F_2$  的距离的和等于常数(大于  $|F_1F_2|$ ) 的点的轨迹叫作椭圆(ellipse)。这两个定点叫作椭圆的焦点, 两焦点间的距离叫作椭圆的焦距。

由椭圆的定义可知, 上述移动的笔尖(动点)画出的轨迹是椭圆。

下面我们根据椭圆的几何特征, 选择适当的坐标系, 建立椭圆的方程。

根据上面的内容, 完成下列任务:

- (1) 写出椭圆标准方程的推导过程(设椭圆的焦距为  $2c$ , 绳长为  $2a$ , 焦点在  $x$  轴上); (10 分)
- (2) 根据材料设计这部分内容的教学设计, 包括教学目标、教学重点、教学过程(含引导学生研究的活和和设计意图)。(20 分)