2013 年上半年教师资格证考试《高中数学》真题（解析）

1

本题考查对椭圆定义的理解情况，要求掌握椭圆的第一定义，第二定义及标准方程。

A 项：符合椭圆的第一定义，平面内与两定点 F1,F2 的距离的和等于常数 2a 的动点的轨迹叫做椭圆，故此命题正确。

B 项：符合椭圆的第二定义，平面内到定点 F 的距离和到定直线的距离之比为常数（即离心率 e,0<e<1）的点的轨迹是椭圆，故此命题正确。< p="" style="box-sizing: border-box;"></e<1）的点的轨迹是椭圆，故此命题正确。<>

C 项：考察椭圆的几何性质。平行于圆锥体底面的平面截圆锥体所得交线为圆，垂直于圆锥体底面的平面截圆锥体所得交线为等腰三角形，穿过圆锥体底面且与底面呈一定角度的平面截圆锥体所得交线为部分椭圆与线段的组合平面图，只有不穿过圆锥体底面且与底面呈一定角度的平面截圆锥体所得交线为椭圆，选项所表述命题为平面与圆锥的交线是椭圆，故此命题错误。

D 项：满足椭圆的标准方程即可判定曲线为平面内的椭圆，二者互为充要条件，而椭圆的标准方程即为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，故此命题正确。

故正确答案为 C。

2

本题主要考查矩阵M的实特征λ值及特征向量a之间的关系。

矩阵 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$，$|\lambda E-M|=0$的$\lambda$的值称为特征值。$(\lambda E-M)a=0$的$a$称为特征向量，$Ea=a$，所以特征向量必须满足$\lambda a=Ma$，所以$Ma$与$a$共线。

A 项：$\lambda\neq 0$时，Ma应该与a共线，错误。

B 项：$\lambda>0$时，Ma应该与a方向相同，错误。

C 项：$\lambda<0$时，Ma应该与a方向相反，错误。

故正确答案为 D。

3

本题考查旋转曲面的方程。

$y^2=2px,x=0$，则$x^2=0$，用x^2+y^2代替y^2，代入$y^2=2px$中，得$x^2+y^2=2px$，即旋转曲面的方程为$x^2+y^2=2px$。

故正确答案为 C。

4
本题考查对初等函数连续性的证明。

A 项：证明正弦函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续的，设x是区间$(-\infty,+\infty)$内任意取定的一点，当x有增量Δx时，对应的函数增量为$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$，由三角公式有：$|\sin(x+\Delta x)-\sin x|=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$，因为$|\cos(x+\frac{\Delta x}{2}|\le 1$，所以

$|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\le 2|\sin\frac{\Delta x}{2}|$，因此，当$\Delta x\to 0$时，由夹逼准则得$|\Delta y|\to 0$，

所以正弦函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续的。未用到极限$\lim\limits_{x\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1(a>0,a\ne 1)$

B 项：证明指数函数$y=a^x$在 R 上连续，因为$a^0=1,\lim\limits_{x\to 0}a^x=1=a^0$这表明$y=a^x$在

$x=0$处连续，设$x=\frac{1}{n}$，当$x\to\infty$时有$\frac{1}{n}\to 0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$，这表明$y=a^x$在

$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上连续，用到了极限$\lim\limits_{x\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1(a>0,a\ne 1)$

故正确答案为 B。

5
本题主要考查定积分的应用。

求函数零点的方法：令原函数的导函数等于零求出驻点，判断原函数与坐标横轴的交点，

由题可知，$f'(x)=x\ln(2+x^2)$，则$f''(x)=\ln(2+x^2)+\frac{2x^2}{2+x^2}>0$恒成立，所以$f'(x)$在定义域内单调递增，所以$f'(x)$的零点个数为 1.

故正确答案为 B。

6
本题主要考查随机事件的条件概率。

利用条件概率公式：$P(M|N)=\frac{P(M\cap N)}{P(N)}=1$，解得：$P(M\cap N)=P(N)$，又因为$P(M\cup N)=P(M)+P(N)-P(M\cap N)$，

所以$P(M\cup N)=P(M)$。

故正确答案为 C。

7
本题主要考查课程标准概述。

根据《普通高中数学课程标准（实验）》中总目标第二条规定：高中数学课程要提高空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力。没有关于数学交流的阐述。

故正确答案为 D。

8
本题考查对数学定义的理解。

□异面直线：不同在任何一个平面内的两条直线；

□无穷小量：极限为零的变量称为无穷小量；

□渐近线：当曲线上一点 M 沿曲线无限远离原点时，如果到一条直线的距离无限趋近于零，那么这条直线称为这条曲线的渐近线；

其中原题目将 渐近线的定义描述为与曲线很接近的直线，“很接近”无法标准定义曲线与渐近线的接近程度，且□□为性质，不能作为定义。

故正确答案为 A。

9

因为$k_l=-\dfrac{1}{4}$，所以$y'=4x^3=4$，解得$x=1$，故切线过点$(1,1)$，切线的斜率为$y'=4x^3=4$，所以得到切线方程为：$y-1=4(x-1)$，即$y-4x+3=0$。

10

（1）证明：将$\begin{cases}3\alpha\beta=-p\\ \alpha^3+\beta^3=-q\end{cases}$代入$Q(x)=x^3+px+q$得，

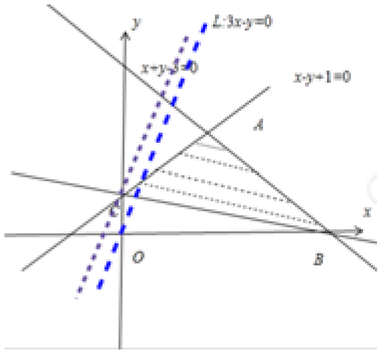
$Q(x)=x^3-3\alpha\beta x-(\alpha^3+\beta^3)$，将代入$Q(x)$得，
$Q(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-(\alpha^3+\beta^3)$，整理得，
$Q(\alpha+\beta)=\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-(\alpha^3+\beta^3)=0$，所以，$\alpha+\beta$是方程$Q(x)=0$的根。

（2）设一元二次方程为$x^2+bx+c=0$，因为α^3，β^3为方程的两根，根据韦达定理有：

$\alpha^3+\beta^3=-b$，$\alpha^3\cdot\beta^3=c$，又因为已知条件$\alpha^3+\beta^3=-q$，$\alpha^3\cdot\beta^3=(\dfrac{-p}{3})^3=-\dfrac{p^3}{27}$，所以

$b=q,c=-\dfrac{p^3}{27}$，即一元二次方程为$x^2+qx-\dfrac{p^3}{27}=0$

11



(x, y)是不等式组$\begin{cases} y \leq x+1 \\ y \leq -x+3 \\ y \geq -\frac{1}{3}x+1 \end{cases}$表示的平面区域，如图所示，设目标函数为$z=f(x, y)=3x-y$，即$z=3x-y$，整理得$y=3x-z$，其中$-z$表示直线$y=3x-z$在$y$轴上的截距，截距越大$z$越小，结合图形可知，当直线过点$C$时$z$最小，将点$C(0,1)$代入得$f(x, y)_{min}=3x-y=-1$

12

地位：高中数学课程是义务教育后普通高级中学的一门主要课程，它包含了数学中最基本的内容，是培养公民素质的基础课程。

作用：高中数学课程对于认识数学与自然界、数学与人类社会的关系，认识数学的科学价值、文化价值，提高提出问题、分析和解决问题的能力，形成理性思维，发展智力和创新意识具有基础性的作用。

高中数学课程有助于学生认识数学的应用价值，增强应用意识，形成解决简单实际问题的能力。

高中数学课程是学习高中物理、化学、技术等课程和进一步学习的基础。同时，它为学生的终身发展，形成科学的世界观、价值观奠定基础，对提高全民族素质具有重要意义。

13

数学概念是数学基础知识的基础，深入理解数学概念的过程能够锻炼抽象逻辑思维，促进思维能力的提高，因此数学概念教学十分重要。数学概念教学的基本要求：

1.注意引入新数学概念

大多数数学概念都有它的现实模型，应根据各个概念的产生发展的具体途径，从学生接触过的具体内容或现实模型引入。此外，有时也采用从已知概念引入新概念的方法。例如：教学反正弦函数的概念，一般是在学生学习了反函数概念基础上，运用反函数的特征来判别正弦函数在什么条件下存在反函数的问题，从而引入反正弦函数。

2.揭示数学概念的外延和内涵

对于原始概念的教学，一般通过对具体事例观察，找出某种特性，并给予说明或描述，帮助学生认识此原始概念所反映的对象范围和属性。例如：在几何中关于“点”的教学，可以让学生观察箭头的尖端，地图上用点表示城镇位置等实例，从而抽象出“点有位置而无大

小”的概念。因为它脱离了现实世界的物质内容，在数学中就可以把箭头的尖端或者地图上表示城镇位置的点作为“点”的模型。

3.明确认识概念之间的关系

学习数学概念要在数学知识体系中不断加深认识，从数学概念间的各种关系来丰富所学概念的内容，深化对所学概念的认识。例如：学生在学习函数的概念时，随着数，式及运算等知识的发展，逐步认识一次函数，二次函数，有理数函数，指数函数，三角函数等。

4.正确理解并能运用数学概念的名称和符号

教学中使学生正确理解并会正确运用数学概念的名称和符号很有必要，因为学生学习数学概念主要是通过抽象的术语，名称，符号等信息来认识的。

5.发挥数学概念在运算，推理，证明中的理论指导作用

数学运算，推理，证明必须有以有关概念为依据。例如：确定三角函数值的符号和它的绝对值必须以三角函数的定义为依据。

6.直观教学

注意通过实物直观、模型直观、图形直观、言语直观，以形成学生鲜明的表象，为他们掌握基础理论提供必要的感性材料。这些感性知识越完善、越丰富，学生形成抽象的理性知识也就越顺利、越牢固。

直观教学必须注意以下几点：实物直观、模型直观、图形直观教学，要注意知识的系统性和理论的严谨性，以便把直观得到的感性认识提高到抽象的理论的水平；直观教具亮出的时机也要适当，拿出教具后要引导学生观察、分析、综合、概括、抽象，不要在细节上分散了学生的注意力，要利于他们抓住本质的数学特征。

运用言语直观教学时，要为透彻地讲授知识服务，为了让学生更能准确地理解教材的文字，不能滥用粗俗的习语，以免喧宾夺主，适得其反。言语直观要照顾学生的年龄特征和知识水平，以他们已有的记忆表象为基础，使其再现并重新组合，形成新的高层次的表象。要防止脱离学生经验，单纯追求言语的形象性。言语直观要求教师语言通俗、有趣、易懂，并配以节奏感和鼓动性，富于启发性和感染力,但切忌“八股调”和矫揉造作的手势，以及各种语病。

7.数形结合

可以根据数学本身的特点，采用数形结合的方法。这样可以使较为抽象的数量关系通过直观的几何图形将其性质反映出来，使抽象的概念、关系得以直观化、形象化,有利于分析、发现和理解它们。

8.注重观察

对于抽象的关系，还可以让学生对一些具体的关系进行观察、比较、分析、归纳，逐步提高他们的抽象思维的能力。

9.重视教学手段改革

运用幻灯、投影仪、电视、电子计算机等先进教学设备，加速教学手段现代化,也是贯彻抽象性与直观性相结合教学原则的重要途径。

14

（1）因为$x(t)=R\cos\omega t,y(t)=R\sin\omega t$，则 $x'(t)=-\omega R\sin\omega t$，$y'(t)=\omega R\cos\omega t$，

$x''(t)=-w^2R\cos wt,y''(t)=-w^2R\sin wt$，所以
$v(t)=(x'(t),y'(t))=(-wR\sin wt,wR\cos wt)=wR(-\sin wt,\cos wt)$，
$a(t)=w^2R(-\cos wt,-\sin wt)$

（2）左边$|v(t)|=|wR(-\sin wt,\cos wt)|=wR$，右边$Rw=wR$，左边=右边，所以等式

$|v(t)|=rw$成立，左边$|a(t)|=w^2R$，右边$\dfrac{v_0^2}{R}=\dfrac{(Rw)^2}{R}=w^2R$,左边等于右边，所以等式

$|a(t)|=\dfrac{v_0^2}{R}$成立

（3）飞行器只受重力作用，重力提供向心力$mg=m\dfrac{v^2}{R}$，所以
$v=\sqrt{gR}=\sqrt{10\times6400\times10^3}=8000m/s$

15

1.评价对数学的理解，可以关注学生能否独立举出一定数量的用于说明问题的正例和反例。特别地，对核心概念学习的评价应该在高中数学学习的整个过程中予以关注。例如，在对数学基本概念中指数函数的定义的理解中，给出题目引导学生判断哪些是指数函数，哪些不是，考察学生对于底数范围，函数系数为 1 等基本概念的理解与记忆，对学生给予发展性评价。

2.评价应关注学生能否建立不同知识之间的联系，把握数学知识的结构、体系。例如，考察学生画图像的基本技能，在学习线性规划内容时，及时复习一次函数图像与不等式的基础知识，通过发展性与鼓励性评价教会学生利用基础知识，掌握基本技能，学会线性规划区域的判定。

3.对数学基本技能的评价，应关注学生能否在理解方法的基础上，针对问题特点进行合理选择，进而熟练运用。

4.数学语言具有精确、简约、形式化等特点，能否恰当地运用数学语言及自然语言进行表达与交流也是评价的重要内容。例如，在学习集合的表示法时，教师通过精炼的语言与恰当的评价，不断加深学生对于描述法表示集合的理解。

16

（1）该生解题错在：在讨论不等式组情况时，缺少了其他两种情况。

错误原因分析：□①只考虑了分母同正，和一正一负的情况，没有考虑分母同负及一负一正的情况，是由于逻辑思维不够强，解题思路不够完整导致的；□②绝对值概念的理解不到位，在第二个不等式组中$a+1<1-2a$是不成立的，因为$a+1>0,1-2a<0$，应为$a+1>-(1-2a)$，即将负半轴的数转化至正半轴考虑。

（2）$(a+1)^{-2}<(1-2a)^{-2}$，即$(\dfrac{1}{a+1})^2<(\dfrac{1}{1-2a})^2$，联系幂函数$f(x)=x^2$，有 4 种可能：

$\begin{cases} \dfrac{1}{a+1}>0 \\ \dfrac{1}{1-2a}>0 \\ \dfrac{1}{a+1}<\dfrac{1}{1-2a} \end{cases}$即$\begin{cases} a+1>0 \\ 1-2a>0 \\ a+1>1-2a \end{cases}$解得$0<a<\dfrac{1}{2}$；

$\begin{cases} \dfrac{1}{a+1}<0 \\ \dfrac{1}{1-2a}<0 \\ \dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{1-2a} \end{cases}$即$\begin{cases} a+1<0 \\ 1-2a<0 \\ a+1<1-2a \end{cases}$无解；

$\begin{cases} \dfrac{1}{a+1}>0 \\ \dfrac{1}{1-2a}<0 \\ \dfrac{1}{a+1}<-\dfrac{1}{1-2a} \end{cases}$即$\begin{cases} a+1>0 \\ 1-2a<0 \\ a+1>-(1-2a) \end{cases}$解得$\dfrac{1}{2}<a<2$；

$\begin{cases} \dfrac{1}{a+1}<0 \\ \dfrac{1}{1-2a}>0 \\ -\dfrac{1}{a+1}<\dfrac{1}{1-2a} \end{cases}$即$\begin{cases} a+1<0 \\ 1-2a>0 \\ -(a+1)>1-2a \end{cases}$无解，故$a$的取值范围是$(0,\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},2)$

（3）解题所运用的数学思想方法：

□数形结合思想：

构造幂函数$f(x)=x^2$，结合其函数图像，思考满足不等式情况的分布，体现了数形结合的思想。

□分类思想：

根据幂函数$f(x)=x^2$的图像性质，将原不等式分为在对称轴同侧和异侧两种思想，再细分为四种情况进行分类讨论。

□等价转化思想：

将分类讨论后的各不等式组中的每一个分式不等式转化为我们熟悉的整式不等式，且转化前与转化后的不等式的解集是完全相同的。

17

（1）问题情境：有两种购房贷款：□住房公积金贷款，年利率为 4%，最高限额 39 万；□商业贷款，年利率为 5%，无限额，购房者可选其一，或两种都选（组合贷款）。今年王先生购买商品房一套，首付 12 万，其余款项办理了组合贷款，且住房公积金贷款为最高限额，每年还一次，为 6 万元，10 年后全部还清，问这套住房现价是多少？（精确到 0.1 万元，$(1+4\%)^{10}\approx1.480,(1+5\%)^{10}\approx1.629$）

数量关系：现房价=首付+住房公积金最高限额+总贷款中的商业贷款每年还的商业贷款+每年还的公积金贷款=每年还的组合贷款额，总公积金贷款应还款额=各年所还公积金贷款之和，总商业贷款应还款额=各年所还商业贷款之和

数学模型：假设每年还的公积金贷款有 x 万元，则相当于

第一年还x万元

第二年还$x(1+4\%)$万元

第三年还$x(1+4\%)^2$万元

第四年还$x(1+4\%)^3$万元

……

第十年还$x(1+4\%)^9$万元

即该模型是等比模型（商业贷款同理）

解答过程：

解：设每年还公积金贷款x万元，总贷款中有y万元为商业贷款，

则该房现价为（$12+39+y$）万元

$$\therefore 39\times(1+4\%)^{10}=x\left[1+(1+4\%)+(1+4\%)^2+\cdots+(1+4\%)^9\right]=x\cdot\frac{(1+4\%)^{10}-1}{4\%}$$

$$\text{解得}x=\frac{39\times(1+4\%)^{10}\times 4\%}{(1+4\%)^{10}-1}=4.81(\text{万元})$$

$$y\cdot(1+5\%)^{10}=(6-x)\cdot\left[1+(1+5\%)+(1+5\%)^2+\cdots+(1+5\%)^9\right]=(6-x)\cdot\frac{(1+5\%)^{10}-1}{5\%}$$

$$\text{解得}y=\frac{(6-x)\times\frac{(1+5\%)^{10}-1}{5\%}}{(1+5\%)^{10}}\approx 9.2(\text{万元})$$

$\therefore$该套住房现价为$12+39+9.2=60.2$（万元），该套住房现价为60.2万元。

讨论：

分析该住房现价的组成部分：□首付，□住房公积金最高限额，□总贷款中的商业贷款，需要计算的量是总贷款中的商业贷款，通过应还款总额相等可解得。

分析应还款总额与各年还款额之间的关系：应还款总额=各年还款额之和

反思：

一般地，如果增加（或减少）的量是一个固定的百分数，该模型是等比模型，如增长率问题，利率问题，分期付款问题。本题还体现了数学基本思想方法的应用，如观察，猜想，化归思想等，对学生的综合能力有较高的要求。

（1）根据问题情景设计题目：

有两种购房贷款：□住房公积金贷款，年利率为 4%，最高限额 39 万；□商业贷款，年利率为 5%，无限额，购房者可选其一，或两种都选（组合贷款）。

根据上述两种购房贷款，自编题目后解答并回答④，题目应满足条件：

□结合你熟悉城市的房价帮自己选择一套价钱合适的房子，价格自定（30-300 万）；

□首付为房价的 20%；

□在三十年之内（≤ 30年即可）还清贷款；

④比较选择哪种贷款更合适。