2015上半年教师资格证考试《数学学科知识与教学能力》(高级中学)（解析）

1

解析：由已知可得 M={y|-1≤y≤1}，N={y|y≥1}，则集合 M∩N={1}。

2

解析：(1)当 a≥0，b>0 时，a<b<=>a4<b4<=>a3|a|<b3|b|；(2)a≤0，b<0 时，显然有 a<b<=>a3|a|<b3|b|成立。因此 a<b 是 a3|a|<b3|b|成立的充分必要条件。

3

【答案】C。解析：设函数$f(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, \text{其它}\end{cases}$，$x_n=\frac{n}{2n+1}$；则有 $x_n\to\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\frac{1}{2})=1$，但是 $f(x)$ 处处不连续。

4

若 f（x）在某个区间 I 内有导数，则 f（x）≥0，(x∈I)<=>f（x）在 I 内为增函数：f'(x)≤O，x∈I<=>f（x）在 I 内为减函数。结合图 I 中导函数的函数值从左到右依次大于 0、小于 0、大于 0，因此原函数图 象从左到右变化趋势依次是单调递增、单调递减、单调递增。因此选 B。

5

解析：由于 x=α 是代数方程 f（x）=0 的根，故有 f（α)=0，x-α 是 f（x）的因式，x-α 整除 f（x），(a，0)是函数 y=f（x）的图像与 x 轴的交点，但是不一定有 f'(α)=0，比如 f(x)=x-2。

6

【答案】A。解析：由旋转变换的矩阵表示，设(x,y)为原坐标系中坐标，(x',y')为旋转变换后坐标系中的坐标。则$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$（α 为逆时针旋转的角度），当 α=45°时，$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\\y'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\end{cases}$，可得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}(y'-x')\end{cases}$。将$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}(y'-x')\end{cases}$代入原方程 $x^2+xy+y^2=1$，可得$\frac{1}{2}x'^2+\frac{3}{2}y'^2=1$。故 $x^2+xy+y^2=1$ 表示的曲线是椭圆。

7

由程序框中的图形符号可知。

8

学生数学学习评价的基本理念：“评价的主要目的是全面了解学生的数学学习历程，激励学生的学习和改进教师的教学；应建立评价目标多元、评价方法多样的评价体系。对数学学习的评价要关注学生的学习结果，更要关注他们学习的过程；要关注学生数学学习的水平，更要关注他们在数学活动中所表现出来的情感与态度，帮助学生认识自我，建立信心。”

9

【参考答案】(1)第 1 个投资周期后资金为 $A(1+\frac{x}{n})$ 元，

第 2 个投资周期后资金总额为 $A(1+\frac{x}{n})^2$ 元，

……

第 n 个投资周期后，即一年后资金总额为 $A(1+\frac{x}{n})^n$ 元。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}A(1+\frac{x}{n})^n=A\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}]^x=Ae^x$

即当 $n\to\infty$ 时，资金总额趋于 Ae^x 元，不会趋于无穷。

10

【参考答案】由 A 到 D 的线路有两条分别是 $A-B-D$，$A-C-D$。

走 $A-B-D$ 发生堵车的概率为 $P_1=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{12})=1-\frac{4}{5}\times\frac{11}{12}=\frac{4}{15}$，

走 $A-C-D$ 发生堵车的概率为 $P_2=1-(1-\frac{1}{10})(1-\frac{1}{6})=1-\frac{9}{10}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{4}$。

显然 P2<P1，所以走 A-C—D 线路发生堵车概率最小，概率为 1/4。

11

【参考答案】证明：由已知可得，整系数方程 3x3+bx2+cx+8=0 可分解为 (qx-p)(lx2+mx+n)=0，其中 l，m，n 均为整数，

展开后，得 lqx3+(mq-lp)x2+(nq-mp)x-np=0

与原方程比较得，lq=3，-np=8。

因为 l，m 均为整数，所以 P 整除 8，q 整除 3。

12

【参考答案】

从求证的结论出发，一步一步地探索保证前一个结论成立的充分条件，直到归结为这个命题的条件，或者归结为定义、公理、定理等，这种思维方法称为分析法。

分析法证明的思维过程：用 Q 表示要证明的结论，则分析法的思维过程可用框图表示为：

$\boxed{Q\Leftarrow P_1}\longrightarrow\boxed{P_1\Leftarrow P_2}\longrightarrow\boxed{P_2\Leftarrow P_3}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\boxed{\text{得到一个明显成立的条件}}$

分析法证明的特点：从“未知”看“需知”，逐步靠拢“已知”，其逐步推理，实际上是寻找使结论成立的充分条件。

例如，对于任意的 $a>0,b>0$，满足基本不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的证明过程。

分析法证明：要证 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

只需证 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$

只需证 $a+b-2\sqrt{ab}\geqslant0$

只需证 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$

因为 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$ 成立

所以 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ $(a>0,b>0)$ 成立。

13

尺规作图的基本要求：

(1)尺规作图使用的直尺和圆规带有想象性质，跟现实中的并非完全相同；

(2)直尺必须没有刻度，无限长，且只能使用直尺的固定一侧。只可以用它来将两个点连在一起，不可以在上画刻度；
(3)圆规可以开至无限宽，但上面亦不能有刻度。它只可以拉开成你之前构造过的长度。
古希腊时期。“几何作图三大问题”：这是三个作图题，只使用圆规和直尺求出下列问题的解，直到十九世纪被证实这是不可能的：
(1)立方倍积，即求作一立方体的边，使该立方体的体积为给定立方体的两倍。
(2)化圆为方，即作一正方形，使其与一给定的圆面积相等。
(3)三等分角，即分一个给定的任意角为三个相等的部分。
14
【参考答案】已知椭圆即为柱面 x2+y2=1 与平面 π：px+qy+z=0 的交线。
平面 π 经过坐标原点，椭圆的中心在坐标原点。设椭圆上任一点 P(x,y，z)，则原点 0 与 P 的距离 r 的最大、小值即为椭圆的长半轴与短半轴长。

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+z^2}$，当 $z=0$ 时，$r_{min}=1$

而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+z^2}=\sqrt{1+(px+qy)^2}$，由柯西不等式得

$r=\sqrt{1+(px+qy)^2}\leqslant\sqrt{1+(p^2+q^2)(x^2+y^2)}=\sqrt{1+p^2+q^2}$，当且仅当 $py=qx$ 时，取等号。

故椭圆的短半轴长为 1，长半轴长为 $\sqrt{1+p^2+q^2}$
15
数学中有一些重要内容、方法、思想是需要学生经历较长的认识过程，逐步理解和掌握的，如函数、概率、数形结合、逻辑推理、模型思想等。因此，教材在呈现相应的数学内容与思想方法时，应根据学生的年龄特征与知识积累，在遵循科学性的前提下，采用逐级递进、螺旋上升的原则。螺旋上升是指在深度、广度等方面都要有实质性的变化，即体现出明显的阶段性要求。
例如，函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型。高中阶段不仅把函数看成变量之间的依赖关系．同时还用集合与对应的语言刻画函数，函数的思想方法将贯穿高中数学课程的始终。因此，教材对函数内容的编排应体现螺旋上升的原则，分阶段逐渐深化。依据内容标准的要求，教材可以将函数内容的学习分为三个主要阶段：
第一阶段，通过一些具体实例，体会数集之间的一种特殊的对应关系。从学生已掌握的具体函数和函数的描述性定义人手，引导学生联系自己的生活经历和实际问题，尝试列举各种各样的函数，构建函数的一般概念。
第二阶段，再通过对指数函数、对数函数等具体函数的研究，加深学生对函数概念的理解。引导学生不断体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，体验指数函数、对数函数等函数与现实世界的密切联系及其在刻画现实问题中的作用。
第三阶段，鼓励学生运用计算器、计算机画出指数函数、对数函数等的图象，探索、比较它们的变化规律．研究函数的性质，求方程的近似解等，在这个过程中反复体会函数的概念．才能真正掌握．灵活应用。
16
【参考答案】(1)方式一的引入，从学生熟悉的实数加法运算入手，降低了认知难度。但是集合间的运算的交、并、补、差与实数的运算虽然有一定的联系，但是也有差别。在教学过程中注意引导学生思考探究避免出现运算误区。
方式二的引入，利用学生身边的人创设问题情景，降低对新知识的陌生感，引发学生思维的共鸣。
方式三的引入，复习以前学过的知识内容，进行新旧知识的衔接过渡，降低学生对新知识

的认知难度。但是缺乏具体内容的回顾，只是简单的提及，不能够全面的顾及到班上的所有学生对已有知识的复习达到降低对新知识认知难度的目的。

(2)问题 1．集合之间是否也具备一些运算规律呢?

问题 2．集合的并集运算与实数的加法运算有什么异同点?

问题 3．集合的补集运算与实数的减法运算有什么异同点?

问题 4．集合的交际运算需要注意的问题有什么?

(3)数学概念的引入的关键点为：①注意运用新、旧知识之间的内在联系；②调动学生认知结构中已有感性经验和知识，去感知理解材料，创设具体情境，从具体事例抽象出数学概念。

在利用新旧知识之间的联系引入概念时，注意创设类比发现的问题情境，关注新旧知识的链接．尝试引入新的概念，这样引入容易使学生在原有的认知结构中得到同化和建构。

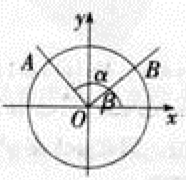
通过创设情境，从具体事例抽象出数学概念时要求充分调动学生认知结构中已有感性经验和知识．去感知理解材料，经过思维加工产生认识飞跃，继而组织成完整的概念图式。在具体引入概念的过程中可以通过实例、绘图或是多媒体辅助引导学生分析数学概念的特点，使学生思维由感性认识自然过渡到理性认识。

17

(1)学生已经学习了任意角三角函数的图象和性质，诱导公式以及平面向量，会向量的坐标运算，会平面向量数量积的坐标表示、模和夹角。能利用向量积求两个向量之间的夹角。

(2)两角差的余弦公式的推导过程是本课的难点，引导学生通过主动参与，独立探索，自己得出结果更是难点。凭直觉得出 cos(α-β)=COSα-cosβ 是学生经常犯的错误，跟学生的直觉判断产生了偏差。学生学过的三角函数知识探索有关三角函数的问题是很自然的，鉴于学生独立地运用单位圆上的三角函数线进行探索存在一定的困难，把探索过程写进了教材，由于推导过程比较复杂，教材给了利用向量的方法推导两角差的余弦公式。由于前一章刚学习了向量，学生应用不灵活。则推导两角差的余弦公式存在困难。

(3)



如图，在平面直角坐标系 xOy 内作单位圆 O，以 Ox 为始边作角 α,β，它们的终边与单位圆 O 的交点分别为 A,B，则，$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$

由向量数量积的坐标表示，有

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\sin\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha+\sin\beta$。

(1)如果 $\alpha-\beta\in[0,\pi]$，那么向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角就是 $\alpha-\beta$.

由向量数量积的定义，有

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$

于是 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha+\sin\beta$。

(2)当 $\alpha-\beta\notin[0,\pi]$ 时，设 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 θ，则

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta=\cos\theta$

另一方面，由图可知 $\alpha-\beta=2k\pi+\theta,k\in Z$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\theta$，也有 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

所以对于任意角 α,β 有 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。