

2015 年下半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学) 参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。解析：利用辗转相除法。

$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$	$g(x)$	$f(x)$	x
	$x^3 + x^2 - x - 1$	$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$	
	$x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$	$x^4 + x^3 - x^2 - x$	
	$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$	$-2x^2 - 3x - 1$	$\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}$
	$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$	$-2x^2 - 2x$	
	$-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$	$-x - 1$	
		$-x - 1$	
		0	

所以 $-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式,进而可知 $x + 1$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式。故本题选 A。

2.【答案】B。解析：记点 (x, y, z) 变换后的坐标为 (x', y', z') , 则 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{bmatrix}$, 即

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y, \text{ 整理得,} \\ z' = 3z, \end{cases} \begin{cases} x = x', \\ y = \frac{1}{2}y', \\ z = \frac{1}{3}z', \end{cases} \text{再代入原曲面方程得, } (x' - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}y' - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}z' - 1\right)^2 = 1, \text{ 这是一个}$$

椭球面。故本题选 B。

3.【答案】D。解析：样本是受审查客体的反映形象或其自身的一部分,按一定方式从总体中抽取的若干个体,用于提供总体的信息及由此对总体作统计推断。样本的平均值称样本均值,在数理统计中,常常用样本均值来估计总体均值。样本越大从总体中提取的信息就越多,对总体的代表性就越好。这里取的两组数据都是随机的,因此均值不一定相等。故本题选 D。

4.【答案】B。解析：A, C, D 三项都是数列极限保不等式性的应用。对于 B 项,由于改变收敛数列的有限项,不会改变数列的极限,所以很容易找到反例,如 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ 1, & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$ 。故本题选 B。

5.【答案】B。解析：向量内积具有交换律、分配律和结合律;向量外积具有分配律和结合律,不具有交换律。 $(a + c) \cdot b = b \cdot (a + c) = b \cdot a + b \cdot c$, A 项正确; $(a + c) \times b = -b \times (a + c) = -(b \times a + b \times c)$, B 项错误; $(a \cdot b)^2 + (a \times b)^2 = (|a||b|\cos\langle a, b \rangle)^2 + (|a||b|\sin\langle a, b \rangle)^2 = |a|^2|b|^2 = a^2b^2$, C 项正确;D 项是二重外积公式。故本题选 B。

6.【答案】C。解析：令 $a_n = \frac{3^n}{n}$ ，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$ ，所以函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{3}$ 。当 $x = \frac{1}{3}$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ （调和级数），此时级数发散；当 $x = -\frac{1}{3}$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ，此时由莱布尼茨判别法知，级数收敛。因此，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$ 的收敛域为 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 。故本题选 C。

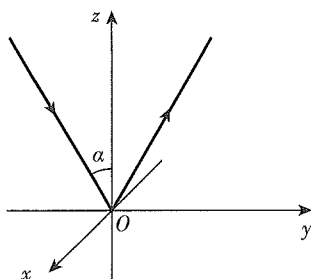
7.【答案】A。解析：第一次数学课程改革发生在 20 世纪初，史称“贝利 - 克莱因运动”。英国数学家贝利提出“数学教育应该面向大众”“数学教育必须重视应用”的改革指导思想；德国数学家克莱因认为，数学教育的意义、内容、教材、方法等，必须紧跟时代步伐，结合近代数学和教育学的新进展，不断进行改革。故本题选 A。

8.【答案】C。解析：《普通高中数学课程标准（实验）》提出了五种基本能力，包括：抽象概括、推理论证、数据处理、空间想象、计算能力。故本题选 C。

二、简答题

9.【参考答案】

以入射点为原点 O ，入射光线与反射光线所在平面为 yOz 平面，建立如图所示的空间直角坐标系，



则向量 $\mathbf{m} = (0, \sin\alpha, \cos\alpha)$ 是反射光线所在直线的方向向量。因此，反射光线的方程为 $\frac{x}{0} = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{z}{\cos\alpha} (y, z > 0)$ 。

易知， z 轴所在直线就是平面镜的法线，而反射光线在 yOz 平面上的方程为 $y = \tan\alpha \cdot z$ ，所以反射光线绕平面镜的法线旋转一周所得旋转体的方程为 $\sqrt{x^2 + y^2} = \tan\alpha \cdot z$ 。

10.【参考答案】

（充分性）若向量 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ 线性无关，则向量组 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 可以构成三维向量空间的一个基，于是对向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ ，存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \boldsymbol{\alpha}$ ，从而线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{有唯一解。}$$

（必要性）若线性方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ 有唯一解，则线性方程组对应系数矩阵的秩与线性方程组

未知数的个数相等,于是有 $r\{v_1, v_2, v_3\} = 3$ (矩阵的秩等于矩阵行向量组的秩),从而 v_1, v_2, v_3 线性无关。

11.【参考答案】

题目要求的是领飞飞机是喷绿色烟雾飞机的概率,注意到乙队仅有3架喷红色烟雾的飞机,所以领飞飞机一定出自甲队,下面分两步进行计算。

第一步,确定领飞飞机出自甲队还是乙队。

因为混合编队中有甲、乙两队飞机各三架,所以领飞飞机出自甲队的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

第二步,计算从甲队3架飞机中选出的领飞飞机是喷绿色烟雾的飞机概率。

因为先从甲队六架飞机中选出三架飞机,再从三架飞机中选出一架飞机作为领飞飞机与直接从甲队六架飞机中选出一架飞机作为领飞飞机是等价的,所以从甲队3架飞机中选出的领飞飞机是喷绿色烟雾飞机的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

综上,根据分步乘法计数原理,领飞飞机是喷绿色烟雾飞机的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

12.【参考答案】

在普通高中课程标准中规定:

必修课程内容确定的原则是:满足未来公民的基本数学需求,为学生进一步的学习提供必要的数学准备。

选修课程内容确定的原则是:满足学生的兴趣和对未来发展的需求,为学生进一步学习、获得较高数学素养奠定基础。

在仔细研读课程标准以及普通高中教材结合自身的教学经验后,确定教学内容应依据数学课程标准、单元目标和具体数学知识点三者的结合。确定教学内容时,特别要注意以下三点:

一是数学知识的主要特征。一个数学知识点的内容是极为庞杂的,我们应该选择该数学知识点最本质的东西作为教学的重点。

二是学生的需要。确定知识点的教学内容也不是由教材一个要素决定的,还涉及学生认知发展阶段性的问题。因此也不可能是教材有什么我们就教什么、学什么,我们应该选择教材内容与学生认知发展相一致的内容作为教学内容。

三是编者的意图。编者的意图主要是通过例题以及课后的练习题来体现的。数学例题以及课后练习题的重要性在数学课程中要远远高于其他学科,因为数学例题以及练习题是数学课程内容建设一个不可或缺的组成部分。在其他课程中,练习题最多只是课程内容的重现,有的只属于教学领域,作为一种教学手段,对课程本身并没有很大影响。但数学课不是这样,数学课“教什么”在相当程度上是由练习题或明或暗指示给教师的。

13.【参考答案】

平面向量是高中数学引入的一个新概念。利用平面向量的定义、定理、性质及有关公式,可以简化解题过程,便于学生的理解和掌握。

向量运算可以提高学生针对数学运算的理解层次,学生最初接触的运算都是数与数之间的运算,而加入向量运算之后,向量运算涉及的数学元素更高,比如说实数、字母、向量,甚至还可以把几何图形加入运算当中,这本身是对数学层次的一个很大提高。而且向量运算对数学的思想也体现得比较多,比如在解析几何当中,或者是在平面几何当中,向量应用确实很方便,一个运算既有代数意义又有几何意义。

一、向量在代数中的应用。根据复数的几何意义,在复平面上可以用向量来表示复数。这样复数的加减法,就可以看成是向量的加减,复数的乘除法可以用向量的旋转和数乘向量得到,学了向量,复数事实上已经没有太多的实质性内容,因而选学内容也就不难理解了。另外向量所建立的数形对应也可用来证明代数中的一些恒等式、不等式问题,只要建立一定的数学模型,就可以较灵活地给出证明方法。

二、向量在三角函数中的应用。当我们利用单位圆来研究三角函数的几何意义时，表示三角函数就是平面向量。利用向量的有关知识可以导出部分诱导公式。一个最有力的证据就是教材中所提供的余弦定理的证明：只要在根据向量得出的关系式的两边平方就可利用向量的运算性质得出要证的结论，它比用综合法提供的证明要简便得多。

三、向量在平面解析几何中的应用。由于向量作为一种有向线段，本身就是有向直线上的一段，且向量的坐标可以用起点、终点的坐标来表示，使向量与平面解析几何特别是其中有关直线的部分保持着一种天然的联系。几何中的有关度量、角度、平行、垂直等问题用向量解决也很方便。特别是平面向量可以推广到空间用来解决立体几何问题。例如在空间直线和平面这部分内容中，解决平行、相交、包含以及计算夹角、距离等问题。

三、解答题

14.【参考答案】

拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，则 $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明：构造辅助函数

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right],$$

则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且 $g(a) = g(b) = 0$ 。

因此，由罗尔定理知， $\exists \xi \in (a, b)$ ，使得

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

拉格朗日中值定理在微积分学中是一个重要的理论基础，是应用数学研究函数在区间上整体形态的有力工具。拉格朗日中值定理在中学数学中应用非常广泛，如利用导数来研究函数的某些性质、证明不等式和方程根的存在性、描绘函数的图像、求极值、最值等等。

四、论述题

15.【参考答案】

(1) 数学的严谨性，是指数学具有很强的逻辑性和较高的精确性，即逻辑的严格性和结论的确定性。量力性是指学生的可接受性。

“严谨性与量力性相结合”说明教学中的数学知识的逻辑严谨性与学生的可接受性之间相适应的关系。理论知识的严谨程度要适合学生的一般知识结构与智力发展水平，随着学生知识结构的不断完善，心理发展水平的提高，逐渐增强理论的严谨程度；反过来，又要通过恰当的理论严谨性逐渐促进学生的接受能力。

显然，这一原则是根据数学本身的特点及学生心理发展的特点提出的。但是，在学习过程中，学生的心理发展是逐步形成的，不同的年龄阶段，其感知、记忆、想象、思维、能力等心理因素都有不同的发展水平。这种心理发展的渐变性决定了在教学中不可能对数学理论的研究达到完全严密的程度，而应该在不同的教学阶段，依据不同的教学目的和内容而提出不同的严谨性要求，即数学教学的严谨性是相对的。

(2) 在证明“ $\sqrt{2}$ 是无理数”的教学过程，对严谨性要求，应设法安排使学生逐步适应的过程与机会，逐步提高其严谨程度，要求做到推理有据，证明要步步有根据、处处有逻辑。在推理有据的同时并不排斥直观和猜想，强调思维的严谨性，允许猜想、辩证地处理好推理的有据和猜想的关系。

由于学生对无理数不熟悉,在实际教学过程中我们采用反证法,先假设是有理数。教学中可以由教师给出证明步骤,让学生只填每一步的理由,鼓励学生发扬“跳一跳够得到”的精神,逐步过渡到学生自己给出严格证明,最后要求达到立论有据,论证简明。“如果 x 是有理数,那么 x 可以写成最简分数 $\frac{p}{q}$ (p, q 是整数且互质)的形式,于是 $2 = (\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$,从而 $p^2 = 2q^2$ 。由于 $2q^2$ 是偶数,所以 p 也是偶数,不妨设 $p = 2a$,则 $2a^2 = q^2$,而 $2a^2$ 是偶数,所以 q 应是偶数,这样 p, q 都是偶数,它们有公约数2,这与 p, q 互质矛盾。因此, $\sqrt{2}$ 不是有理数,是无理数。”

在教学过程中,不能消极适应学生,降低理论要求,必须在符合内容科学性的前提下,结合学生实际组织教学。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 学生1的解题思路从开始看是比较清晰的,利用两次 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,后又结合分类讨论利用两角差的余弦公式求出 $\cos \beta$ 的值,但是分类讨论后忘记验证两种情况是否都成立,原因是对公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ 认识不清,掌握不全面。

应验证得出的结果为:

若 $\cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,则 $\cos \beta = \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$,从而 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$,这与已知矛盾。因此, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ 。

学生2利用两角和的正弦公式,后化为一元二次方程得出两个结果,但是也没有验证结果的正确性。学生2和学生1犯的是一样的错误。整体来说学生对三角函数公式掌握的比较牢固,运用的也比较熟练,只是在熟练的基础上还不能更好地内化数学思想,即验证结果的成立与分类讨论的应用。

(2) 首先请全班学生两人为一组,讨论板演学生的答案是否正确,若对,说出解题思路以及解题亮点,若不对,说出应该如何纠正,时间为两分钟。在此期间,教师到学生中间巡视,走进学生,找到学生的疑惑点。然后教师请学生代表来分析此题,并说出正确结果。因为学生对此知识点掌握的相对薄弱,教师应在此处着重强调在得到答案之后验证的重要性,让学生从题目中总结学到的方法。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 我更赞同第二种方案,理由如下:

① 本节课定位为“基本不等式”的起始课,它是在学生已经系统地学习了不等式关系和不等式性质,掌握了不等式性质的基础上进行教学的。学生对于“基本不等式”还处于初步感知阶段,不能马上实现基本不等式在求数值中的应用,因此,在“基本不等式”的起始课当中,应当先让学生结合基本不等式的背景和意义进行自主探索,了解不等式的证明过程,加深印象及存在原因后再学习应用会更好。

② 从新课程标准的要求出发,高中数学课程标准是指导教师进行课程安排、课程设计的标尺,高考的要求也是依据新课程标准来制定的,数学必修5当中,高中数学课程标准明确说明,基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a, b > 0$) 在开始阶段,应将探索并了解基本不等式的证明过程放在重点位置。

③ 从教材的编写来看,在基本不等式这节的开始,是以北京召开的第24届国际数学家大会的会标为问题的背景,提问学生“你能在这个图中找到一些相等关系或不等关系吗?”利用面积间存在的数量关系,抽象出不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$,并在此基础上,从三个角度引导学生认识、证明不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a, b > 0$),在这之后的例题应用当中才提及“基本不等式”是解决最大(小)值问题的有力工具。

因此,从这三点来看,基本不等式起始课的教学重点应该采用第二种方案,即强调基本不等式的背景、过程及意义,将学生感受和体验“基本不等式”中“基本”的意义作为教学重点。

(2) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 的几何解释:如图 1 所示,大正方形的面积大于四个三角形的面积和,当且仅当 $a = b$ 时,等号成立(即正方形的对角线将正方形分成 4 个等腰直角三角形,正方形的面积等于 4 个等腰直角三角形的面积和)。

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b > 0)$$

的几何解释:如图 2 所示,以 $a+b$ 为直径的半圆,在直径 AB 上任一点 C ,过 C 作直径 AB 的垂线与半圆交于 D 点。由射影定理可得 $CD = \sqrt{ab}$,由图示显然可得 $CD \leq OD$ (即一个圆的半径大于等于垂直该直径的弦的一半),即得 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b > 0)$ 。

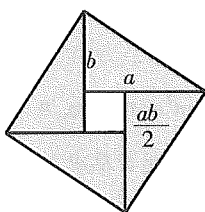


图 1

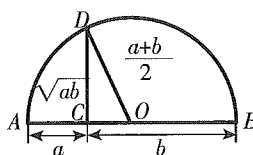


图 2

(3) 从“数及其运算”的角度看, $\frac{a+b}{2}$ 是两个正数 a, b 的“平均数”;从定量几何的角度看, ab 是长为 a 、宽为 b 的矩形面积, $\sqrt{ab}$ 就叫作两个非负数 a, b 的“几何平均数”。因此,不等式中涉及的是代数、几何中的“基本量”,而且有多种等价形式。

代数——涉及两个正数的运算,也就是通过加、减、乘、除、乘方、开方等运算而产生的变化。在对运算结果之间的大小关系比较中就可以得到各种表现形式。

几何——周长相等的矩形中,正方形的面积最大;或者,以 $a+b$ 为斜边的直角三角形中,等腰直角三角形的高最长;或者,更直观地,等圆中,弦长不大于直径;……

函数——本质上是函数凹凸性的反映。例如,可以直接通过函数 $y = \frac{1}{x}, y = \sqrt{x}, y = x^2$ 等学生最熟悉的函数的凹凸性导出公式;或者,利用函数图像的切线(本质上是“以直代曲”),例如,过点 $(1, 1)$ 作曲线 $y = \sqrt{x}$ 的切线,切线方程为 $y = \frac{1}{2}(x+1)$, 曲线 $y = \sqrt{x}$ 总位于切线的下方,故有 $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1)$ 。令 $x = \frac{a}{b}$, 代入化简即得重要不等式。

也可以这样考虑:在一个平面内固定一条直线 $x+y=2A$, 考察曲线簇 $xy=c$ (这里 c 是参数), 画图可看出,和给定直线有公共点,且使 c 取最大值的曲线,是和直线相切于 (A, A) 的那条曲线,这时 $c = A^2$, 于是 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 。

另外,掌握最简单的形式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b > 0)$, 推广到三维,再推广到多维形式,就是 n 个正数的几何平均值不大于算术平均值的定理。

三维形式:对于三个正数 a, b, c , 有 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, 当且仅当 $a = b = c$ 时,等号成立。

多维形式:若 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbf{R}^+$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}$, 当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ 时,等号成立。

认识“基本”二字,是学习基本不等式这一节内容的前提,事实上,该不等式反映了实数的两种基本运算(即加法和乘法)所引出的大小变化,这一本质不仅反映在其代数结构上,而且也有几何意义,由此而生发出的问题在训练学生的代数推理能力和几何直观能力上都发挥了良好的作用。因此,必须从基本不等式的代数结构和几何意义两方面入手,才能让学生深刻理解它的本质。