

2016 年上半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】A。解析：(方法一) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)^{1+n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)^{1+n^2}}{1 + \frac{1}{1+n^2}} =$

$$\frac{e}{1} = e。$$

(方法二) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln\left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)^{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)^{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n^2}} = e。$

2. 【答案】C。解析：A 项是交错级数，根据莱布尼茨判别法容易判断出它是收敛的；B, C 两项是 p 级数，对于 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ，当 $p > 1$ 时收敛；当 $p \leq 1$ 时发散，所以 B 项级数收敛，C 项级数发散；D 项，利用正项级数的比值判别法容易判断出它是收敛的。故本题选 C。

3. 【答案】B。解析：题中曲面方程可化为 $y^2 - (x^2 + z^2) = 1$ ，因此曲面可以看成是双曲线 $\begin{cases} y^2 - z^2 = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ ，绕它的实轴(y 轴) 旋转一周得到的，这是一个旋转(双叶)双曲面。故本题选 B。

4. 【答案】D。解析：函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上黎曼可积，则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一定有界。这是黎曼可积的必要条件。故本题选 D。

5. 【答案】C。解析：令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，则矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0。$$

显然，矩阵 A 特征值为 -1 (二重)， 5 ，所以不同特征值的个数为 2。故本题选 C。

6. 【答案】C。解析：二次型 $x^2 - 3xy + y^2$ 对应的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ 。由 $|\lambda E - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \left(\lambda - \frac{5}{2}\right) = 0 \text{ 可知，矩阵 } A \text{ 的特征值为 } -\frac{1}{2} \text{ 和 } \frac{5}{2}，\text{因为两个特征值异号，所以二}$$

次型 $x^2 - 3xy + y^2$ 是不定二次型。故本题选 C。

7. 【答案】B。解析：“直线与平面平行的性质定理”的学习过程中对数据处理能力的提升没有很明显的作。故本题选 B。

8. 【答案】C。解析：创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。学生自己发现和提出问题是创新的基础；独立思考、学会思考是创新的核心；归纳概括得到猜想和规律，并加以验证，是创新的重要方法。故本题选 C。

二、简答题

9.【参考答案】

由题意,质点在平面上的运动轨迹为 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = \sin t, \end{cases}$ 所以质点的速度 $v(t) =$

$$\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}, \text{ 令 } t = 1 \text{ 得, } v(1) = \sqrt{2 - 2\cos 1}.$$

10.【参考答案】

由题意,令 $F(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - 169$, 则 $F'_x(x, y, z) = 2(x - 1)$, $F'_y(x, y, z) = 2(y - 1)$, $F'_z(x, y, z) = 2(z - 1)$, 从而 $F'_x(4, 5, 13) = 2 \times (4 - 1) = 6$, $F'_y(4, 5, 13) = 2 \times (5 - 1) = 8$, $F'_z(4, 5, 13) = 2 \times (13 - 1) = 24$, 因此,球面在点 $(4, 5, 13)$ 处的切平面方程为 $6(x - 4) + 8(y - 5) + 24(z - 13) = 0$, 整理得 $3x + 4y + 12z - 188 = 0$.

11.【参考答案】

记甲跑一圈为事件 A , 乙跑一圈为事件 B , 则 $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. 此外,事件 A, B 同时发生的情况只有一种,即出现的点数为 1, 所以 $P(AB) = \frac{1}{6} = P(A)P(B)$, 从而事件 A 和事件 B 相互独立.

12.【参考答案】

行为动词中的“理解”就是把握内在逻辑联系,对知识做出解释、扩展、提供证据、判断等。以“等差数列的概念”为例,理解等差数列的概念;探索并掌握等差数列的通项公式;能在具体的问题情境中,发现数列的等差关系并能用有关知识解决相应的问题;体会等差数列与一次函数的关系,这些都属于“理解”的目标层次。学生在学习过程中,能够把握等差数列的概念,通过内在逻辑关系进行推导,探索并总结等差数列的通项公式,能够对日常所见的等差数列问题做出解释,解决相关的问题,并能够体会等差数列与一次函数之间的关系。

13.【参考答案】

教学过程:

(1) 创设情境,提出问题

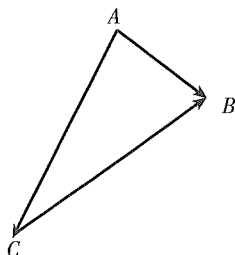
问题:以千岛湖求两岛间的距离引入,已知两岛分别与第三座岛的距离及夹角,如何求这两岛间的距离。

老师活动:以上问题能否用正弦定理来解决,请同学们尝试一下,如果解决不了,思考它是已知三角形两边及夹角,求第三边的问题。能否也像正弦定理那样,寻找它们之间的某种定量关系?

(2) 求异探新,证明定理

问题 1:这是一个已知三角形两边 a 和 b 及两边的夹角 C , 求第三边 c 的问题。已知三角形两边分别为 a 和 b , 这两边的夹角为 C , 角 C 满足什么条件时易求出第三边 c ? (由勾股定理导入)

问题 2:自学提纲



学生活动:小组合作探究,完成填空。

证明过程:因为 $\overrightarrow{AB} =$ _____ (向量的什么法则), 所以 $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + 2$ _____ + $\overrightarrow{CB}^2 =$

$\overrightarrow{AC}^2 + 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CB}|\cos \underline{\hspace{2cm}} + \overrightarrow{CB}^2 = a^2 - \underline{\hspace{2cm}} + b^2$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2$ $\underline{\hspace{2cm}}$, 当 $C = 90^\circ$ 时, 上式变为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

类似地可以证明 $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

教师活动: 引导学生从特殊情况入手, 用已有的初中所学的平面几何的有关知识来研究这一问题, 从而寻找出这些量之间存在的某种定量关系。得出结论, 上式就是余弦定理。(得出了余弦定理, 还应引导学生联想、类比、转化, 思考是否还有其它方法证明余弦定理)

问题 3: 让学生观察以下各式的结构有什么特征? 能用语言描述吗?

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2bacosC$$

师生共同总结: 余弦定理的内容是三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的二倍。

(3) 巩固新知, 运用练习

询问学生这节课的收获, 能否学以致用。请小组继续自学教材上的两个例题。比一比, 赛一赛。看哪一个小组先发现这两个生活实际问题的解决能用上今天学的余弦定理? 如何解决?

(4) 运用定理, 解决问题

让学生观察余弦定理及推论的构成形式, 思考用余弦定理及推论可以解决哪些类型的三角形问题。

定理学习的一般环节:

① 了解定理的内容, 能够解决什么问题(创设情境, 提出问题中体现); ② 理解定理的含义, 认识定理的条件和结论, 如在公式推导过程中对条件引起注意, 对结论从结构、功能、性质、使用步骤等角度分析以加深印象和理解(求异探新, 证明定理中体现); ③ 定理的证明或推导过程: 学生与教师一起研究证明方法, 如不需要证明, 学生根据教师提供的材料体会定理规定的合理性(求异探新, 证明定理中体现); ④ 熟悉定理的使用, 循序渐进地应用定理, 将定理纳入已有的知识体系中去(巩固新知, 运用练习中体现); ⑤ 引申和拓展定理的运用(运用定理, 解决问题中体现)。

三、解答题

14. 【参考答案】

取矩阵 A 的列向量 $\alpha_1 = (1, 1, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 4)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$, 则子空间 $A(\mathbf{R}^3) = \{A\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}^3\} = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组就是 $A(\mathbf{R}^3)$ 的一个基。

对矩阵 A 作初等行变换化成阶梯形矩阵,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{显然 } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 就是 } A(\mathbf{R}^3) \text{ 的一个基。}$$

对 α_1, α_2 进行施密特正交化得 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 3)^T$, $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \left(-\frac{4}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{1}{11}\right)^T$ 。故

子空间 $A(\mathbf{R}^3)$ 的一个正交基是 $\beta_1 = (1, 1, 3)^T$, $\beta_2 = \left(-\frac{4}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{1}{11}\right)^T$ 。

四、论述题

15. 【参考答案】

(1) 数学的严谨性, 是指数学具有很强的逻辑性和较高的精确性, 即逻辑的严谨性和结论的确定性。量力性是指学生的可接受性。这一原则, 说明教学中的数学知识的逻辑严谨性与学生的可接受性之间相适应的关系。理论知识的严谨程度要适合学生的一般知识结构与智力发展水平, 随着学生知识结构的不断完善, 心理发展水平的提高, 逐渐增强理论的严谨程度; 反过来, 又要通过恰当的理论严谨性逐渐提升学生的接受能力。

显然, 这一原则是根据数学本身的特点及学生心理发展的特点提出的。但是, 在学习过程中, 学生的心理

发展是逐步形成的,不同的年龄阶段,其感知、记忆、想象、思维、能力等心理因素都有不同的发展水平。这种心理发展的渐变性决定了在教学中不可能对数学理论的研究达到完全严谨的程度,而应该在不同的教学阶段,依据不同的教学目的和内容而提出不同的严谨性要求。即数学教学的严谨性是相对的。

(2) 实数指数幂在数学上的引入,首先可以从初中学习的整数指数幂的概念和运算性质出发,比如在回顾平方根和立方根的基础上,类比出正数的 n 次方根的定义,从而把指数推广到分数指数,进而推广到有理数指数,再推广到实数指数,并将幂的运算性质由整数指数幂推广到实数指数幂。

(3) 在高中“实数指数幂”概念的教学中,应设法安排学生逐步适应的过程与机会,逐步提高其严谨程度,做到立论有据。比如学生初学分数指数幂很不适应,教师可以引导学生研究已学过的整数指数幂的概念性质,理解分数指数幂的概念,进而学习分数指数幂的性质,并学习分数指数幂和根式之间的互化,渗透“转化”的数学思想,最后达到知识点之间的密切联系,使概念的产生有理有据。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 学生甲的解法是先根据已知条件求出等差数列的首项 a_1 和公差 d ,然后根据等差数列的前 n 项和公式求出前110项的和;学生乙的解法是根据数列与函数的关系求解,因为等差数列的前 n 项和公式为 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$,可以把前 n 项和 S_n 看成 n 的二次函数,令 $S_n = An^2 + Bn$ 的形式。

(2) (*) 中结论是成立的。

由等差数列的前 n 项和公式可得

$$S_p = a_1p + \frac{p(p-1)}{2}d = q, \textcircled{1}$$

$$S_q = a_1q + \frac{q(q-1)}{2}d = p, \textcircled{2}$$

$$S_{p+q} = a_1(p+q) + \frac{(p+q)(p+q-1)}{2}d, \textcircled{3}$$

$$\text{由于 } p \neq q, \text{联立 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 可解得 } d = -\frac{2(p+q)}{pq}, \textcircled{4}$$

$$\text{则 } S_p + S_q + S_{p+q} = a_1(p+q) + \frac{(p^2+q^2-p-q)}{2}d + a_1(p+q) + \frac{(p^2+q^2+2pq-p-q)}{2}d,$$

$$\text{代入 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 得 } S_p + S_q + S_{p+q} = p+q+p+q + \frac{d}{2} \times 2pq = 2(p+q) + dpq,$$

$$\text{代入 } \textcircled{4} \text{ 可得 } S_p + S_q + S_{p+q} = 0,$$

故(*)中结论是成立的。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 结合上述教学要求,将“古典概型”起始课的教学目标设计如下。

知识与技能:能够依据古典概型的特征判断一个概型是否是古典概型,能够利用概率计算公式求解一些简单的古典概型的概率。

过程与方法:经历从实际问题中抽象出数学模型的过程,提升从具体到抽象、从特殊到一般的分析问题的能力。

情感态度与价值观:在体会概率意义、数学严密性的同时,通过合作学习交流,感受与他人合作的重要性以及初步形成实事求是的科学态度和锲而不舍的求学精神。

(2) 符合古典概型的两个正例:①有红心1,2,3和黑桃4,5共5张扑克牌,将其牌点向下置于桌上,现从中任意抽取一张;②掷两枚硬币,可能出现的结果。

不符合古典概型的两个反例:①射击运动员向一靶心进行射击,这一试验的结果有有限个,命中10环,命

中9环,……,命中1环和命中0环(即不命中);②向一个圆面内随机地投一个点,该点落在圆面内任意一点都是等可能的。

解析:古典概型概念:(1) 试验中所有可能出现的基本事件只有有限个;(2) 每个基本事件出现的可能性相等。只有同时具有这两个特点的概率模型,称为古典概率模型,简称古典概型。举例子时针对古典概型中的两种特性举出即可。

正例中,①是古典概型是因为试验的所有可能结果是5个,从中任意抽取一张每个结果出现的可能性相等;②是古典概型是因为试验的所有可能结果是3个,结果的可能性相等。

反例中,①中不是古典概型是因为试验的所有可能结果虽然是有限个,但命中10环,命中9环,……,命中1环和不命中的出现不是等可能的,即不满足古典概型的第二个条件;②中不是古典概型是因为试验的结果是无限个,不是有限个。

(3) 设抛掷一枚质地均匀的骰子,出现偶数点为事件 A 。

古典概型的计算公式为 $P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$ 。

第一种解法:基本事件为出现点数1,2,3,4,5,6,而 A 包含的基本事件为出现点数2,4,6,故 $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 。

第二种解法:对于投掷骰子实验,出现奇数点与偶数点的概率相等,即 $P(\text{奇数点}) = P(\text{偶数点})$ 。

由概率的加法公式,得 $P(\text{奇数点}) + P(\text{偶数点}) = P(\text{必然事件}) = 1, P(A) = \frac{1}{2}$ 。

采用两种解法对帮助学生理解古典概型的作用在于,既能帮助学生理解古典概型的特点:试验中每个基本事件出现的可能性相等,还能激发学生采用不同方法探究知识,求解答案。两答案的相互对比,也能起到检验的效果。