

2016 年下半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D。解析： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x} \right)^{1+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+x} \right)^{2x+2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{1+x} \right)^{x+1} \right]^2}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{e^2}{1} = e^2$ 。

2.【答案】D。解析： n 阶行列式中若 n^2-n+1 个元素为零，则至少有一行(或列)的元素全是零，所以它的值为0。

3.【答案】A。解析：提取直线交面式两平面法向量，求解其交线的方向向量： $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3i - j + 2k$ ，其方向向量

为 $m=(3, -1, 2)$ ，直线 L 的标准方程为 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ 。平面 Π 的法向量为 $n=(2, 8, 1)$ ， $m \perp n$ ，且点 $(2, -1, 3)$ 不在平面 Π 上，所以直线 L 与平面 Π 平行。

4.【答案】A。解析：根据函数在某点连续的定义可知 A 项为正确选项。

5.【答案】B。解析：设特征向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 所对应的特征值为 λ ，则 $A\alpha = \lambda\alpha$ ，又因为 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，所以 $\lambda=2$ 。

6.【答案】B。解析：由题意得离散型随机变量期望为 $E = \sum_{k=1}^n a_k p_k$ ，故方差 $D(x) = \sum_{k=1}^n (a_k - E)^2 p_k$ 。

7.【答案】C。解析：第三次数学危机为数学罗素悖论的产生。第三次数学危机引发了关于数学逻辑基础可靠性的问题，导致无矛盾的集合论公理系统的产生。在这场危机中集合论得到较快的发展，数学基础的进步更快，数理逻辑也更加成熟。到现在，从整体来看，第三次数学危机还没有解决到令人满意的程度。

8.【答案】B。解析：区分度是指一道题能多大程度上把不同水平的人区分开来，即题目的鉴别力；信度指测验结果的一致性、稳定性及可靠性；效度是指所测量出的结果反映想要考查内容的程度。平均得分除以该题分值为该题目的难度，所以正确选项为 B。

二、简答题

9.【参考答案】

已知 $TX=AX+B$ ，所以 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ，所以 $x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ， $y' = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$ ，即 $x = 2x' - 1$ ， $y =$

$3y' - 2$ ，代入 $9x^2 + 4y^2 + 18x + 16y - 11 = 0$ ，化简得 $x'^2 + y'^2 = 1$ ，所以所得二次曲线 L_1 的方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 。

10.【参考答案】

(1)线性方程组 $AX=B$ 有唯一解的充要条件是 $r(A)=r(A,B)=n$ ；有无穷多解的充要条件是 $r(A)=r(A,B)<n$ 。所以 $AX=B$ 有解的充要条件是 $r(A)=r(A,B)$ 。

(2)由题意得增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 经过初等行变换得到 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

即 $\begin{cases} x_1=4x_3+5x_4+5, \\ x_2=-3x_3-4x_4-4, \end{cases}$ 所以齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 令 $x_3=1, x_4=0$, 得到线性方

程组 $AX=B$ 的特解 $\beta=\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所以通解为 $X=\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为常数。

11.【参考答案】

(1)根据变异系数=标准差÷均值, 所以 $V_{\text{汽车}}=\frac{6}{24}\times 100\%=25\%$, $V_{\text{电动}}=\frac{2}{34}\times 100\%\approx 5.9\%$, $V_{\text{汽车}}>V_{\text{电动}}$, 所以选择电动车, 因为变异系数表示离散程度, 变异系数越小, 分布越集中。

(2)由题意知, X, Y 分别满足: $X\sim N(24, 36), Y\sim N(34, 4)$,

$$P(X\leq 38)=P\left(\frac{X-24}{6}\leq \frac{38-24}{6}\right)=\Phi\left(\frac{7}{3}\right),$$

$$P(Y\leq 38)=P\left(\frac{Y-34}{2}\leq \frac{38-34}{2}\right)=\Phi(2),$$

又 $\Phi\left(\frac{7}{3}\right)>\Phi(2)$, 所以当送货有 38 分钟可用时, 选择开汽车。

$$P(X\leq 34)=P\left(\frac{X-24}{6}\leq \frac{34-24}{6}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right),$$

$$P(Y\leq 34)=P\left(\frac{Y-34}{2}\leq \frac{34-34}{2}\right)=\Phi(0),$$

又 $\Phi\left(\frac{5}{3}\right)>\Phi(0)$, 所以当送货有 34 分钟可用时, 选择开汽车。

12.【参考答案】

基本不等式是从大量数学问题和现实问题中抽象出来的一个模型, 在公式推导中所蕴涵的数学思想方法如数形结合、抽象归纳、演绎推理、分析法证明等在各种不等式的研究中均有着广泛的应用; 另外, 在解决函数最值问题中, 基本不等式也起着重要的作用。

13.【参考答案】

定理教学的一般环节:

(1)介绍定理的背景或特殊情形。

例如, 在讲解二项式定理前这样开始: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=$ _____, $(a+b)^4=$ _____, ...

(2)了解定理的内容, 理解定理的含义, 认识定理的条件和结论, 能够解决什么问题。

二项式定理为 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$), 该定理给出两个数之和的整数次幂展开为类似项之和的恒等式。

(3)定理的证明或推导过程: 学生与老师一起研究证明方法, 如不需证明, 学生根据老师提供的材料体会定理规定的合理性。

二项式定理的证明: $(a+b)^n$ 是 n 个 $(a+b)$ 相乘, 每个 $(a+b)$ 在相乘时, 有两种选择, 选 a 或选 b , 由分步计数原理可知展开式共有 2^n 项 (包括同类项), 其中每一项都是 $a^{n-k}b^k$ ($k=0, 1, \cdots, n$) 的形式, 对于每一项 $a^{n-k}b^k$, 它是由 k 个 $(a+b)$ 选了 b , $n-k$ 个 $(a+b)$ 选了 a 得到的, 它出现的次数相当于从 n 个 $(a+b)$ 中取 k 个 b 的组合数 C_n^k , 将它们

合并同类项,就得二项展开式,这就是二项式定理。

(4)熟悉定理的使用。循序渐进地应用定理,将定理纳入到已有的知识体系中去。

二项式定理的公式特征:①项数:共有 $n+1$ 项。②次数:字母 a 按降幂排列,次数由 n 递减到0;字母 b 按升幂排列,次数由0递增到 n 。各项的次数都等于 n 。③二项式系数:依次为 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k, \dots, C_n^n$ 这里 $C_n^k (k=0, 1, \dots, n)$ 称为二项式系数。④二项展开式的通项:式中的 $C_n^k a^{n-k} b^k$ 叫作二项展开式的通项,用 T_{k+1} 表示。即通项为展开式的第 $k+1$ 项: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$ 。

(5)引申和拓展定理的运用。

利用二项式定理解决问题。例,求 $(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式。

三、解答题

14.【参考答案】

(1)证明:因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续且可导,所以 $f'(x)=2x$,令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$,所以 $f(x)$ 的驻点为 $x=0$ 。 $g'(x)=e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x(x^2+2x)$,令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 -2 ,所以 $g(x)$ 的驻点为 $x=0$ 和 $x=-2$ 。即证得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有共同驻点 $x=0$ 。

(2)证明:设 $F(x) = e^x f(x)$,因为 $f(a)=f(b)=0$,所以 $F(a)=e^a f(a)=0, F(b)=e^b f(b)=0$,即 $F(a)=F(b)$ 。

又函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续且可导,所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续且可导,根据罗尔定理,存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $F'(\xi) = e^\xi f'(\xi) + e^\xi f(\xi) = e^\xi [f'(\xi) + f(\xi)] = 0$,又 $e^\xi \neq 0$,所以 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ 。即存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ 。所以方程 $f'(x) + f(x) = 0$ 在 (a, b) 至少有一个实根。

四、论述题

15.【参考答案】

(1)设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数,任意的 $x_1, x_2 \in D$,若 $x_1 > x_2$,就有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的严格单调递增函数。函数单调性的概念是研究具体函数单调性的依据,在研究函数的值域、定义域、最大值、最小值等性质中有重要应用(内部);在解不等式、证明不等式、数列的性质等数学的其他内容的研究中也有重要的应用(外部)。可见,不论在函数内部还是在外部,函数的单调性都有重要应用,因而在数学中具有核心地位。

(2)定义法:定义域中任意 x_1, x_2 ,若 $x_1 > x_2$,有 $f(x_1) > f(x_2)$ (或 $f(x_1) < f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在定义域上严格单调递增(或递减)。定义法判断函数单调性比较适应于对定义域内任意两个数 x_1, x_2 ,当 $x_1 > x_2$ 时,容易得出 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 大小关系的函数。在解决问题时,定义法是最直接的方法,这种方法思路比较清晰,但是对待一些不太容易判断出 $f(x_1) - f(x_2)$ 正负的情况,用定义法解析比较麻烦。

导数法:一般先确定函数的定义域,求出原函数的导数 $f'(x)$,若导数 $f'(x) \geq 0$,则函数在定义域内单调递增,反之则单调递减。导数法适用于函数在其定义域内可导且能判断导函数与零的大小关系的情形,针对定义法解决不了的题型,或者用定义法解题相对比较繁琐,用导数法解题就会比较简单。导数法提供了一种重要的解题思想。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)教师应该区别对待学生提出的问题。首先,要判断学生问题的价值,依据价值性大小给予回应。我们与教学目标相关的问题都归为“正问题”,把偏离或背离教学目标的问题归为“负问题”。如本案例中学生的提问“能否从等式右边推导出等式左边”这一问题便是“正问题”,对待“正问题”应该给予积极回应。对学生提出的“负问题”,教师一方面可以启发引导,将其转化成“正问题”进行处理,一方面可以采取“冷处理”的办法。其次,要依据问题的内容灵活进行,如师生互动讨论或生生小组讨论,也可以让学生自行探究或课下解决。

(2)如果我是该教师我会将该问题作为一道思考题目,让学生进行小范围的讨论,最后对此三种解题方式进行分析总结。具体实施方式如下:

问题1:刚刚这位同学提出了一个很新颖的解题思路,那么我们可不可以从等式右边推导出等式左边呢?大家同桌之间讨论一下,可不可以,又是如何推导的呢?

我将在学生讨论的过程中,进行巡视并对有问题的学生加以指导,为了不耽误课堂进度,讨论时间初步预设为3分钟。

提问,请学生进行结果展示

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\theta+\phi}{2} \cos \frac{\theta-\phi}{2} \\ &= \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right) \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \phi, \text{结果得证。} \end{aligned}$$

提问:对比三种解决方法,各自的优点是什么?谈一谈你更倾向于用哪种方法解决问题。

引导学生共同总结:在解决三角函数公式证明题的时候,①合理选择诱导公式以及和差化积公式非常重要,如方法三对于两角和差公式的反复运用,虽计算过程稍微复杂,但是方法更加简单,容易想到。②能够灵活运用整体代换的思想方法快速解决问题,如方法一、方法二可以精简计算过程,避免计算出错。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)教学目标如下。

知识与技能:理解对数的概念和意义,能说出对数与指数的关系,掌握对数式与指数式的互相转化。

过程与方法:通过事例认识对数的模型,体会引入对数的必要性;通过观察分析得出对数的概念及对数式与指数式的互化,增强类比、分析、归纳能力。

情感态度与价值观:在学习对数概念的过程中,培养探究意识;理解指数与对数之间的内在联系,增强分析、解决问题的能力。

(2)教学重点:对数的概念;对数式与指数式的相互转化。

教学难点:对数概念的理解。

(3)用多媒体展示细胞分裂的视频:某种细胞分裂时,由一个分裂成2个,由2个分成4个……。一个这样的细胞分裂 x 次以后,得到的细胞个数 y 与分裂次数 x 的函数关系式可表示为 $y=2^x$ 。

提问:①经过多少次分裂后,细胞的个数为256?

②如果已知细胞个数为 N ,如何求分裂次数呢?

教师进行总结归纳学生的回答,引入与指数函数有着密切关系的函数模型——对数函数。