

2017 年上半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。解析：由函数极限的定义，若存在 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=k>0$ ，则对 $\forall \varepsilon>0$ ， $\exists \delta>0$ ，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-k|<\varepsilon$ 。

令 $\varepsilon=k-r$ ，则有 $-(k-r)<f(x)-k<k-r$ 。故对 $\forall r \in (0,k)$ ， $\exists \delta>0$ ， $\forall x \in (a-\delta,a+\delta)$ ，且 $x \neq a$ ，有 $f(x)>r$ 。

2.【答案】D。解析：旋转变换公式为 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，当 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 时得到的旋转变换的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

3.【答案】C。解析：所求柱面的母线平行于 x 轴，则柱面方程中不含参数 x ，通过题中的方程组，消去 x 即可得到C项。

4.【答案】A。解析：由 $f(x)$ 为连续函数，则 $f(x)$ 存在原函数 $F(x)$ ，使得 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+r$ (r 为任意实数)，显然 $f(x)$ 的原函数不唯一。

5.【答案】B。解析：因 $A \subset B$ ，且 $P(B) \leq 1$ ，故 $P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B) \leq P(A|B)$ ，故本题选B。

6.【答案】C。解析：矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)^2$ ，则由方程 $(\lambda+1)(\lambda-3)^2=0$ ，解得 $\lambda=-1$ 或 3 。将 $\lambda=3$ 代入 $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ ，化简得到 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ ，即 $x_1=x_3$ ， x_2 可任意取值，

选项中没有对应的特征向量。同理代入 $\lambda=-1$ ，得到 $x_1=-x_3$ ， $x_2=0$ 。令 $x_3=1$ ，则特征向量为 $(-1,0,1)^T$ 。

7.【答案】A。解析：明朝末年，《原本》传入中国。1606年，由我国数学家徐光启执笔，意大利传教士利玛窦口译，合作翻译了《原本》的前六卷，并于1607年在北京印刷出版。这是我国最早的汉译本，在翻译时，徐光启在“原本”前加上了“几何”一词，“几何原本”一词由此而来。

8.【答案】B。解析：A项公理定义是由数学公理对被定义项进行定义，如概率的公理化定义；B项属加种差定义是由被定义概念的邻近的属和种差所组成的定义，即“邻近的属+种差=被定义概念”，题干中“有一个角是直角的平行四边形是矩形”，它邻近的属为平行四边形，种差为其一角为直角；C项递归定义也称归纳定义，是指用递归的方法给一个概念下定义，它由初始条件和归纳条件构成；D项外延定义是指通过揭示属概念所包括的种概念来明确该属概念所指的定义，如有理数和无理数统称实数。

二、简答题

9.【参考答案】

(1)令 $F(x,y,z)=2x^2+y^2+3z^2-6$ ，对 $F(x,y,z)$ 分别求 x,y,z 的偏导数。 $F'_x(x,y,z)=4x$ ， $F'_y(x,y,z)=2y$ ， $F'_z(x,y,z)=6z$ 。代入 $M(1,1,1)$ 点，得到该点处的法向量为 $(4,2,6)$ 。利用点法式方程，则切平面方程为 $4(x-1)+2(y-1)+6(z-1)=0$ 。

(2)由(1)知，切平面方程为 $4(x-1)+2(y-1)+6(z-1)=0$ ，则切平面法向量为 $(4,2,6)$ 。平面 $5x+ky-4z=0$ 法向量为 $(5,k,-4)$ 。由两平面垂直，得到 $4 \times 5 + 2 \times k + 6 \times (-4) = 0$ ，解得 $k=2$ 。

10.【参考答案】

(1)根据题意设存在一组不全为零的常数 k_1, k_2, k_3 ，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ ，即有 $\begin{cases} 2k_1+k_2+tk_3=0, \\ k_1+k_2+2k_3=0, \\ -2k_1+2k_3=0, \end{cases}$ 则该方程组

的系数矩阵的行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & t \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2t - 2 = 0$, 即 $t = 1$ 。

(2) 通过初等行变换 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 α_1, α_2 是该向量组

的一个极大线性无关组, 可知 $\alpha_3 = 3\alpha_2 - \alpha_1$ 。

11.【参考答案】

(1) 设“A=选取的3杯饮料都是甲品牌”, 一次试验成功的概率为 $P(A) = \frac{C_3^1}{C_6^3} = \frac{1}{20}$ 。独立进行5次试验, 服从二项分布 $X \sim B\left(5, \frac{1}{20}\right)$ 。 $P\{X=3\} = C_5^3 \left(\frac{1}{20}\right)^3 \left(\frac{19}{20}\right)^{5-3} = \frac{361}{320\,000}$ 。

(2) 该品尝者具备区分能力。理由: 由(1)可知此随机试验成功的概率大概为千分之一, 是小概率事件, 基本可以排除偶然性, 故此人具备区分两种品牌饮料的能力。

12.【参考答案】

行为动词“了解”的含义: 从具体实例中知道或举例说明对象的有关特征; 根据对象的特征, 从具体情境中辨认或者举例说明对象。“了解函数奇偶性”的含义: 学生能够知道函数奇偶性的定义, 奇函数定义域关于原点对称, 函数图像关于原点对称, 满足 $f(-x) = -f(x)$; 偶函数定义域关于原点对称, 函数图像关于 y 轴对称, 满足 $f(-x) = f(x)$ 。能够通过解析式或图像判断函数的奇偶性, 判断哪些函数是奇函数, 哪些函数是偶函数, 以及非奇非偶函数, 并能够举出一些函数奇偶性的例子。

13.【参考答案】

(1) 对于学生基础知识和基本技能达成情况的评价, 必须要准确把握课程内容中的要求。学生在学习数列这一章的时候应该掌握数列的概念, 等差数列的概念、等差数列的通项公式及前 n 项和计算方法, 等比数列的概念、等比数列的通项公式及前 n 项和计算方法。所以在设计题型的时候, 涵盖的知识点应包括以上知识点, 达到全面性要求, 以便宏观了解学生对本章知识的掌握程度。

(2) 在设计试题时, 应该关注并且体现学生在数感、运算能力、推理能力以及应用意识和创新意识等方面的考查。测试中应该包含数列的计算、求解数列通项公式常用方法(如“倒序相加法”“错位相减法”“裂项相消法”等)的使用以及常见的证明题、探究题等题目, 可对学生能力进行全方位考查。

(3) 根据评价的目的合理设计试题的类型, 有效地发挥各种类型题目的功能。题型练习多样化, 要有选择、填空、判断、解答、证明等常规性试题。同时可设置观察寻找数列数字规律、运算规律等探索性试题。还可以联系生活实际, 将数列问题的运算融入日常生活中, 设置实践性问题等。

(4) 在书面测验中, 积极探索可以考查学生学习过程的试题, 了解学生的学习过程。试题的设计要有难度也要有区分度, 照顾到不同学习层次的学生, 以便了解全体学生对本章知识掌握的程度, 指导今后的教学工作。测验学习结果的同时更要测验到学生由不会到会的学习过程。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 证明: 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 其中 $x_0 \in [a, b]$ 。

由 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| < M|x - x_0|$, 其中 $M = \max_{t \in (x-\delta, x+\delta)} f(t)$ 。

当 $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M}$ 时, 则有 $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ 。故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

(2) 由可导定义知, $\forall x \in (a, b)$,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\theta\Delta x) = f(x), \text{ 其中 } 0 \leq \theta \leq 1;$$

$$F'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f(a+\theta_1(x-a)) = f(a), \text{ 其中 } 0 \leq \theta_1 \leq 1;$$

$$F'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{\int_b^x f(t) dt}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} f(b+\theta_2(x-b)) = f(b), \text{ 其中 } 0 \leq \theta_2 \leq 1.$$

故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

(1) 合情推理是根据已有的事实和正确的结论(包括定义、公理、定理等)、实验和实践的结果,以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程。演绎推理是根据已有的事实和正确的结论(包括定义、公理、定理等),按照严格的逻辑法则得到新结论的推理过程。

(2) 在解决问题的过程中,合情推理具有猜测和发现结论、探索 and 提供思路的作用,有利于创新意识的培养。例如,在研究球体时,我们会自然地联想到圆。由于球与圆在形状上有类似的地方,即都具有完美的对称性,都是到定点的距离等于定长的点的集合,因此我们推测圆的一些特征,球也可能有。圆有切线,切线与圆只交于一点,切点到圆心的距离等于圆的半径,类似地,我们推测可能存在这样的平面,与球只交于一点,该点到球心的距离等于球的半径。平面内不共线的 3 个点确定一个圆,类似地,我们猜想空间中不共面的 4 个点确定一个球等。

演绎推理是数学中严格证明的工具,在解决数学问题中起着重要的作用。“三段论”是演绎推理的一般模式,前提和结论之间存在必然的联系,只要前提是真实的,推理的形式是正确的,那么结论也必定是正确的。例如,三角函数都是周期函数, $\sin x$ 是三角函数,因此推导证明出该函数是周期函数。又如,这样一道问题“证明函数 $f(x) = -x^2 + 2x$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是增函数”。大前提是增函数的定义,小前提是推导函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上满足增函数的定义,进而得出结论。

合情推理从推理形式上看,是由部分到整体、个别到一般、由特殊到特殊的推理;而演绎推理是由一般到特殊的推理。从推理所得的结论来看,合情推理的结论不一定正确,有待进一步证明;演绎推理在大前提、小前提和推理形式都正确的前提下,得到的结论一定正确。就数学而言,演绎推理是证明数学结论、建立数学体系的重要思维过程。但数学结论、证明思路等的发现,主要靠合情推理。因此,合情推理与演绎推理是相辅相成的。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 学生 1 在解答过程中只关注了 $a-b$ 与 b 同向与反向的情况,在两个向量模长相等时 a 与 b 满足的关系,但是忽略了 $a-b$ 与 b 两个向量不共线的情况。学生 2 在解答过程中虽然注意到向量模长的性质即 $|a|^2 = a \cdot a$,但是在化简过程中把向量的数量积与实数的乘法产生了混淆,忽略了向量数量积的性质,即 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta$,其中 θ 为两向量的夹角。学生 3 在解答过程中把向量的数量积当作实数相乘,忽略了向量数量积的性质,即 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta$,其中 θ 为两向量的夹角。

(2) 向量的线性运算不仅涉及向量的长度还涉及向量的方向。因此提出以下问题引导学生思考。

问题 1: 向量在进行线性运算加减法的时候,满足什么样的运算法则呢?

问题 2: 三角形法则与平行四边形法则,两种方法在计算的过程中应根据向量的何种特征进行合理的选择呢?

问题 3: 现在我们将 a 与 b 分两种情况进行讨论:①两向量有相同起点时,②两向量首尾相连时。对两个向量进行减法的线性运算。现在大家动起手来一起在纸上画一画 a 与 b 满足何种位置关系时候,能够使得 $|a-b| = |b|$ 。我们又可以借助哪些特殊的图形对两个向量的位置关系进行描述呢?

问题 4: 两种情况最终都可以对等腰三角形进行概括描述,如在等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$, 令 $\overrightarrow{BC}=a, \overrightarrow{AC}=b$

b , 则 $a-b=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}$ 。又 $AB=AC$, 则 $|a-b|=|b|$ 。(见图 1)

那么接下来, 大家继续借助等腰三角形 ABC , 在其基础上画出 $2b$ 与 $a-2b$, 那么你可以发现什么结论呢? 继续画出 $2a$ 与 $2a-b$, 那么你又可以发现什么结论呢?

结论: 根据向量的线性运算法则以及三角形内角与边长的性质: 大边对大角, $\triangle BCD$ 中 $CD > BD$, 即 $|2b| > |a-2b|$ 。而 $a-2b, 2a$ 与 $2a-b$ 的关系无法判断, 故题目选 A。(见图 2)

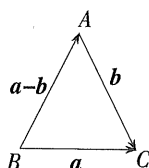


图 1

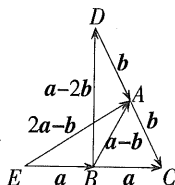


图 2

(3) 向量元素与实数运算的本质区别在于, 向量运算不仅涉及向量的长度, 还涉及向量的方向。

向量的线性运算与实数运算虽然在运算过程中均满足运算律: 交换律、结合律、分配律, 但是向量线性运算的结果为向量, 实数运算的结果为实数。

向量的数量积与实数运算虽然在运算过程中均满足运算律: 交换律、分配律且运算结果均为实数, 但实数的乘法满足消去律, 向量的数量积则不满足。

在实数运算中, 若 $a \neq 0$ 且 $ab=0$, 则 $b=0$ 。但在向量运算中, 若 $a \neq 0$ 且 $ab=0$, 则有两种情况 $b=0$ 或 $a \perp b$ 。

六、教学设计题

17. [参考答案]

(1) 结合上述教学要求, 将“增(减)函数”概念形成过程中教学的重难点确立如下。

教学重点: 从感知到认知上理解函数单调性的概念。

教学难点: 归纳并理解抽象函数单调性的定义。

(2) 高中函数单调性中增减性的研究是对初中相关内容的进一步深化和提高, 具体给出了函数在某个区间是增函数或减函数的定义, 其定义的要害:

① 函数的单调性是相对于某个区间来说的;

② 在增减函数形式化定义的形成过程中要注重从特殊到一般的过渡, 也就是对定义中“任意”的理解。

(3) 活动一: 展示学生熟悉的一次函数 $y=x$ 和二次函数 $y=x^2$, 给出函数图像, 让学生从图像上获得“上升”“下降”的整体认识。

提问 1: 它们的图像有什么规律, 它反映了相应的函数值的哪些变化规律?

活动二: 针对二次函数 $y=x^2$ 给出下面表格:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y=x^2$	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

要求学生结合上面的表格, 用自然语言描述图像特征“上升”“下降”。

活动三: 要求尝试运用数学符号将自然语言的描述上升到形式化的定义。

提问 2: 在区间 $[0, +\infty)$ 上任意给定两个数值, 计算它们对应的函数值进行比较, 可以验证上述自然语言描述的“上升”, 但不能保证“任意”, 可否给出一般性的结论?

学生分析回答, 教师总结归纳得出函数单调性的一般概念。

活动四: 利用多媒体展示 $y=x^2$ 的函数图像, 并演示 $[0, +\infty)$ 区间内任取点 P 在函数图像上“按横坐标 x 增大”的方向移动时, 点 P 的纵坐标的变化规律。

提问 3: 增函数定义中, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 改为当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 可以吗?

要求学生类比增函数的定义, 给出减函数的定义及其几何意义。

提问 4: 思考在区间(如 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, +\infty)$) 的公共端点 0 处, 函数是增函数还是减函数?

学生分析归纳,教师总结:函数的单调性是对定义域内某个区间而言的。对于单独的一点由于其函数值是某一确定的常数,因此没有增减变化,所以并不存在单调性问题。

教师补充知识点:有些函数在整个定义域内存在单调性,而有些函数在定义域内某个区间上是增函数,而另一些区间是减函数,有些没有单调区间。

提问 5:你能再列举几个函数的例子,并讨论它们的单调性吗?

学生举例,教师进行总结。