

2018 年上半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D。解析：一个有理数乘另一个有理数的积仍然是有理数，即有理数对于乘法运算是封闭的。有理数与数轴上的点一一对应，任何两个有理数都可以比较大小，结果可以是大于、等于或小于。实数集包括有理数集和无理数集，而实数集又是复数集的真子集，所以有理数集是实数集的子集，有理数集也是复数集的子集。

2.【答案】C。解析：本题考察向量积的知识。向量积的定义，设向量 c 由向量 a 与 b 按如下方式确定：①向量 c 的模 $|c| = |a||b|\sin\theta$ ， θ 为向量 a 与 b 的夹角；②向量 c 的方向既垂直于向量 a ，又垂直于向量 b ，且其指向符合右手定则，则向量 c 叫作向量 a 与 b 的向量积，记作 $c = a \times b$ 。根据向量积的定义，题干中的(1)(2)正确，(3)(4)错误。故本题选 C。

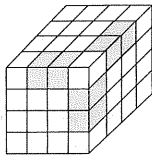
3.【答案】D。解析：根据微积分的知识，可导的函数必连续，所以 D 项正确。下面用函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ， $x \in (0, 1)$ 说明 ABC 三项都不正确。

函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上可导，但它在 $(0, 1)$ 上没有最大值，也没有最小值，即它不是有界的。下面证明函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不是一致连续的。分别取序列 $x_n^{(1)} = \frac{1}{n}$ 和 $x_n^{(2)} = \frac{1}{n+1}$ ，显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) = 0$ ，所以对 $\forall \delta > 0$ ， $\exists N > 0$ ，当 $n > N$ 时，有 $|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| < \delta$ 。取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ，对 $\forall \delta > 0$ ，当 $|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| < \delta$ 时，有 $|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| = |n - (n+1)| = 1 > \varepsilon_0$ ，所以函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不是一致连续的。

4.【答案】B。解析： n 个未知量的非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解的充要条件是其系数矩阵 A 的秩等于其增广矩阵 B 的秩。而当 $r(A) = r(B) = n$ 时，方程组有唯一解；当 $r(A) = r(B) < n$ 时，方程组有无穷多个解；当 $r(A) < r(B)$ 时，方程组无解。

本题中，因为线性方程组 $\begin{cases} ax+by=u, \\ cx+dy=v \end{cases}$ 的系数矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 与增广矩阵 $\begin{pmatrix} a & b & u \\ c & d & v \end{pmatrix}$ 的秩均为 2，且等于未知量个数，所以该方程组有唯一解。

5.【答案】A。解析：先求两个面被涂成红色的小正方体个数。如图所示，每条棱上有 2 个小正方体有两面被涂成红色，共有 12 条棱，所以共有 24 个小正方体恰有两面被涂成了红色，所求概率是 $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$ 。



6.【答案】B。解析：抛物柱面 $y^2 = 2x$ 和平面 $x - y - 2 = 0$ 可看作是 xOy 平面内曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 沿平行 z 轴方向平移得到。联立两个方程 $y^2 = 2x$ 与方程 $x - y - 2 = 0$ ，消去 y 得 $x^2 - 6x + 4 = 0$ ，其中 $\Delta = 6^2 - 4 \times 4 \times 1 = 20 > 0$ ，故在 xOy 平面内曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 的交是两个点。沿着平行 z 轴方向平移这两个点，就得到了两条平行直线，即抛物柱面 $y^2 = 2x$ 与平面 $x - y - 2 = 0$ 的交为平行于 z 轴的两条平行直线。

7.【答案】D。解析：“尺规作图三大问题”是指三等分角，即三等分任意角；立方倍积，即作一个立方体使之体积等于已知立方体体积的二倍；化圆为方，即作一个正方形使之面积等于已知圆的面积。

8.【答案】B。解析：平面向量是高中数学必修 4 学习的内容，风险与决策是高中数学选修 4-9 的内容，数列

与差分是高中数学选修 4-3 的内容,矩阵与变换是选修 4-2 的内容。

二、简答题

9.【参考答案】

若矩阵 A 存在逆矩阵,则有 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$,故而要求矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$,即 $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ 。

因为 $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,所以 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 。

10.【参考答案】

设 $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + xy + 1$,于是 $F'_x = 2x + y, F'_y = -4y + x, F'_z = 2z$ 。过 A 点的切平面的法向量是 $(F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A))$ 。将 A 点坐标 $(1, 2, 2)$ 代入导函数中得 $F'_x(A) = 4, F'_y(A) = -7, F'_z(A) = 4$,得到切平面的法向量是 $(4, -7, 4)$ 。

11.【参考答案】

先证满射。对任意 $g(x) = a \cos x + b \sin x \in V$,有 $\int g(x) dx = \int (a \cos x + b \sin x) dx = a \sin x - b \cos x + C$,所以存在 $f(x) = -b \cos x + a \sin x \in V$,使得 $Df(x) = f'(x) = g(x)$,即 D 是 V 到 V 上的满射。

再证单射。对于 $f_1(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x \in V$ 和 $f_2(x) = a_2 \cos x + b_2 \sin x \in V$,如果 $f_1(x) \neq f_2(x)$,则 $f_1(x) - f_2(x) = (a_1 - a_2) \cos x + (b_1 - b_2) \sin x = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \sin(x + \varphi) \neq 0$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立,所以 $a_1 = a_2$ 和 $b_1 = b_2$ 不同时成立。

$Df_1(x) = -a_1 \sin x + b_1 \cos x, Df_2(x) = -a_2 \sin x + b_2 \cos x$,则 $Df_1(x) \neq Df_2(x)$ 。若不然,有 $Df_1(x) = -a_1 \sin x + b_1 \cos x = -a_2 \sin x + b_2 \cos x = Df_2(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立。当 $x = 0$ 时,有 $b_1 = b_2$;当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时,有 $a_1 = a_2$,与“ $f_1(x) \neq f_2(x)$ 时 $a_1 = a_2$ 和 $b_1 = b_2$ 不同时成立”相矛盾。即证得 D 是 V 到 V 上的单射。

相关知识

设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射,

若 $f(A) = B$,即 B 中任一元素 b 都是 A 中某元素的像,则称 f 为 A 到 B 上的满射;

若对 A 中任意两个不同元素 $a_1 \neq a_2$,它们的像 $f(a_1) \neq f(a_2)$,则称 f 为 A 到 B 的单射;

若映射 f 既是单射,又是满射,则称映射 f 为 A 到 B 的“双射”(或“一一映射”)。

12.【参考答案】

教学方法是教师引导学生掌握知识技能,获得身心发展而共同活动的方法。选择中学数学教学方法的依据:

①符合教学规律和教学原则;②符合教学目标和任务;③符合教学内容的特点;④符合学生的发展水平;⑤符合教师的特长;⑥符合教学的经验性。

13.【参考答案】

“探索”是过程与方法目标行为动词,“掌握”是知识与技能目标行为动词。探索和掌握两点间距离公式这一目标的设置,要求学生不仅要记住该公式的内容,还需要掌握该公式的推导过程,联系知识间的内在关系,体会其中的数学思想,为进一步的学习提供必要的数学准备。

探索并掌握两点间的距离公式有助于学生认识数学内容之间的内在联系。两点间的距离是中学数学学习的主要内容之一,在高中数学中占有重要地位。探索两点间的距离公式的过程中,需要数轴、直角坐标系、直角三角形、勾股定理等知识,而两点间的距离公式又是几何中最简单的一种距离,点到直线的距离、两条平行直线间的距离、两平行平面间的距离、异面直线公垂线段的长度等计算最终都可以归结为两点间的距离。学生经历探索并掌握两点间的距离公式的学习过程,能够更好地体会并理解这些知识内在的联系,这对构建知识体系,增强学习数学的信心也很有帮助。

探索并掌握两点间的距离公式有助于学生体会数形结合思想,形成正确的数学观。探索两点间的距离公式经历将几何问题代数化的过程,用代数的语言描述几何要素及其关系。两点间的距离公式是将几何问题转化为代数问题的重要桥梁和工具。利用距离公式分析代数结果的几何含义,也有助于最终解决几何问题。引导学生经

历这样的数形结合的过程,对发展学生的推理能力很有益处。

三、解答题

14.【参考答案】

由 $f'(x) - 3x^2 f(x) = 0$ 整理得 $\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 f(x)$,

分离变量得 $\frac{df(x)}{f(x)} = 3x^2 dx$,

两边同时积分得 $\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int 3x^2 dx$, 即 $\ln f(x) = x^3 + C$,

故 $f(x) = e^{x^3+C} = C_1 e^{x^3}$ 。

又因为 $f(0) = C_1 = 1$,

所以 $f(x) = e^{x^3}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

教学活动应努力使全体学生达到课程目标的基本要求,同时要关注学生的个体差异,促进每个学生在原有基础上的发展。

对于学习有困难的学生,教师要给予及时的关注与帮助;鼓励他们主动参与数学学习活动,并尝试用自己的方式解决问题、发表自己的看法;及时地肯定他们的点滴进步;耐心地引导他们分析产生困难或错误的原因,并鼓励他们自己去改正,从而增强学习数学的兴趣和信心。对于学有余力并对数学有兴趣的学生,教师要为他们提供足够的材料和思维空间,指导他们阅读,发展他们的数学才能。

在教学活动中,要鼓励与提倡解决问题策略的多样化,恰当评价学生在解决问题过程中所表现出的不同水平。问题情境的设计、教学过程的展开、练习的安排等要尽可能地让所有学生都能主动参与,提出各自解决问题的策略。引导学生通过与他人交流选择合适的策略,丰富数学活动的经验,提高思维水平。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)我认为这位老师的教学处理有欠妥当。首先,教学活动是师生积极参与,交往互动,共同发展的过程。教师在提问了两名学生得到答案后就进行后续的教学,没有做到面向全体学生,违背了新课程改革中教育观的要求。其次,在两位同学回答后,只有结果性评价,没有过程性评价,不利于学生形成良好的学习习惯。最后,针对其中的错误答案,没有引导学生分析错误原因,没有很好地起到一个组织者、引导者以及合作者的作用。

(2)①甲同学这种“找不全”的现象可能是由于异面直线的概念理解不清,导致找不全。教师在日常教学过程中,应多运用这些概念,使学生在认识上获得巩固加深,培养和提高他们运用概念,分析问题和解决问题的能力,形成新的认识结构。同时,要引导学生善于总结,从一个概念出发,把关联概念、派生概念串连成线,相互对比,既直观形象,又有利于发展学生的创造性思维。如本题中,教师可以把两条直线平行、相交、异面三种位置关系一同研究,相互对照,有利于学生对概念的掌握。

②甲同学这种“找不全”的现象还可能是由于方法不得当,缺少条理性,导致遗漏。针对这一问题,用条件结论的改变拓展学生的思维,某个类型的典型题目选择哪一种解法最佳,为什么要选择这种解题方法,要讲充分,方能让学生真正掌握。还要注重解题方法的比较、总结这一细节,学生才能进一步认识规律。如本题寻找异面直线的问题,可以转化为寻找共面直线,这样就大幅度地降低了本题的难度,有利于学生对该知识的理解。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)看一看以下式子,展开式是什么?有多少项?

$(a+b)^1 = ?$ $(a+b)^2 = ?$ $(a+b)^3 = ?$

根据以前的经验可得：

$$(a+b)^1=a+b;$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

通过上面的等式,大家已经发现了一定的规律,展开式的首项和末项的系数均为1,中间项系数为其“肩上”的两个数字之和

$$\begin{array}{ccccccc} (a+b)^1 & & 1 & 1 & & & \\ (a+b)^2 & & 1 & 2 & 1 & & \\ (a+b)^3 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ (a+b)^n & & & & & & \dots \end{array}$$

那么 $(a+b)^n$ 是否也有这样的规律呢?你能准确写出这些项吗?(引出新课)

【设计意图】通过这样的导入设计,首先创设情境,激发了学生的学习兴趣以及求知欲,有利于后续课堂的继续推进,另外在引导的过程中,先从简单的式子入手,再一步步深入,符合学生的认知经验,也为其在后续推导 $(a+b)^n$ 的过程中提供一定的方法和依据。

(2)推导二项式定理的基本步骤如下。

①根据多项式乘法法则,得 $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$ 。

②引导学生运用计数原理推导 $(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$ 。

推导思路如下: $(a+b)^2$ 是2个 $(a+b)$ 相乘,根据多项式乘法法则,每个 $(a+b)$ 在相乘时有两个选择,选 a 或选 b ,而且每个 $(a+b)$ 中的 a 或 b 都选定后,才能得到展开式中的一项。于是由分步乘法计数原理,在合并同类项之前, $(a+b)^2$ 的展开式共有 $2 \times 2 = 2^2$ 项,而且每一项都是 $a^{2-k} \times b^k (k=0,1,2)$ 的形式。对于每一个 $k (k \in \{0,1,2\})$ 对应的 $a^{2-k} \times b^k$ 是由 $2-k$ 个 $(a+b)$ 中选 a , k 个 $(a+b)$ 中选 b 得到的。由于 b 选定后, a 的选法也随之确定,因此, $a^{2-k} \times b^k$ 出现的次数相当于从2个 $(a+b)$ 中取 k 个 b 的组合数。所以,得到 $(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$ 。

③类比步骤②的推导思路,猜想 $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ 的展开式,并通过多项式乘法对猜想结果进行验证。

④类比步骤②和步骤③,猜想 $(a+b)^n$ 的展开式。

通过上面几个步骤,猜想 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\dots+C_n^ka^{n-k}b^k+\dots+C_n^nb^n$ 。

⑤对步骤④猜想的 $(a+b)^n$ 的展开式进行验证。

类比步骤②中的推导思路。 $(a+b)^n$ 是 n 个 $(a+b)$ 相乘,根据多项式乘法法则,每个 $(a+b)$ 在相乘时有两个选择,选 a 或选 b ,而且每个 $(a+b)$ 中的 a 或 b 都选定后,才能得到展开式中的一项。于是由分步乘法计数原理,在合并同类项之前, $(a+b)^n$ 的展开式共有 2^n 项,而且每一项都是 $a^{n-k} \times b^k (k=0,1,\dots,n)$ 的形式。对于每一个 $k (k \in \{0,1,\dots,n\})$ 对应的 $a^{n-k} \times b^k$ 是由 $n-k$ 个 $(a+b)$ 中选 a , k 个 $(a+b)$ 中选 b 得到的。由于 b 选定后, a 的选法也随之确定,因此, $a^{n-k} \times b^k$ 出现的次数相当于从 n 个 $(a+b)$ 中取 k 个 b 的组合数 C_n^k 。所以,验证了猜想: $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\dots+C_n^ka^{n-k}b^k+\dots+C_n^nb^n$ 。