

2018 年下半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D。解析：本题考查平面的法向量、向量的垂直等相关知识。平面的法向量是垂直于平面的非零向量。在直角坐标系中，与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ (A, B, C 不同时为 0) 的法向量 $n=(A, B, C)$ 垂直的非零向量平行于该平面。经验证，向量 $a=(2, 3, 1)$ 只与 D 项中平面的法向量 $(1, -1, 1)$ 垂直。故本题选 D。

2.【答案】B。解析：本题考查函数极限的计算。

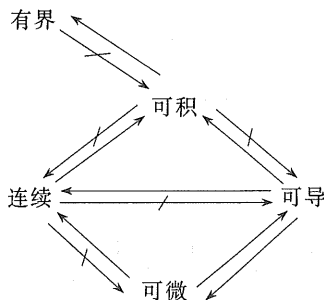
(方法一) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$ 。

(方法二) 本题可以用洛必达法则计算, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$ 。故本题选 B。

3.【答案】D。解析：本题考查黎曼可积的条件。若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上(黎曼)可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界(可积的必要条件), 故本题选 D。

下面说明其他三个选项。可积的充分条件有以下 3 个: ①函数在闭区间上连续; ②函数在闭区间上有界且只有有限个间断点; ③函数在闭区间上单调。由此可排除 B 项和 C 项。又因为在一元函数中, 可微一定连续, 且连续一定可积, 但反之不成立, 故排除 A 项。

一元函数在闭区间上连续、可导、可微、可积、有界的关系图如下:



4.【答案】B。解析：本题考查定积分的几何意义或定积分的计算。

(方法一) 定积分 $\int_{-a}^a b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$ 表示被积函数 $y = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ 与 x 轴所围成的图形的面积, 即椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在 x 轴上方部分的面积。而椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积为 πab 。所以 $\int_{-a}^a b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{\pi ab}{2}$ 。

(方法二) 本题也可用第二换元积分法计算。令 $x = a \sin t$, 由于 $-a \leq x \leq a$, 所以 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 且 $dx = a \cos t dt$, 所以

$$\int_{-a}^a b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \cos t \cdot a \cos t dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \frac{ab}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \right) = \frac{\pi ab}{2}。故本题$$

选 B。

5.【答案】C。解析：本题考查向量组的线性相关性。

(方法一) 若一个向量组中, 一个向量可由其余向量线性表出, 则这几个向量必线性相关; 若一个向量组中, 任意一个向量都不能被其余向量线性表出, 则这几个向量必线性无关。本题中, 若向量 γ 与向量 α 和向量 β 线性相关, 则存在不同时为零的实数 x, y , 使得 $\gamma = x\alpha + y\beta = (x+y, y, x)$, 经观察, ABD 三项中的向量都能被 α 和 β 线性表出。故本题选 C。

(方法二)向量组 α, β, γ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A=(\alpha^T, \beta^T, \gamma^T)$ 满秩 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ 。依次验证四个选项所对应的矩阵的

行列式是否等于零即可。下面以选项 C 为例进行计算。 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 所以向量

$(1, 2, 1)$ 与向量 α 和向量 β 线性无关。故本题选 C。

6.【答案】B。解析：本题考查线性空间的维数、线性空间的基。由题意知，线性空间 V 中的每一个元素都是 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的线性组合。而 $\cos x$ 和 $\sin x$ 是线性无关的，这是因为如果存在实数 m, n ，使得 $m\cos x + n\sin x = 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立，则 $m=n=0$ 。因此 $\cos x$ 和 $\sin x$ 是线性空间 V 的一组基，所以 V 的维数是 2。故本题选 B。

7.【答案】C。解析：本题考查课程目标行为动词的相关知识。在课程标准中有两类行为动词，一类是描述结果目标的行为动词，包括“了解(知道)、理解、掌握、运用”等术语。另一类是描述过程目标的行为动词，包括“经历、体验、探索”等术语。每一组术语中按照从前到后的顺序要求递增，即行为动词按要求的高低排序为：了解(知道) < 理解 < 掌握 < 运用，经历 < 体验 < 探索。故本题选 C。

8.【答案】A。解析：本题考查命题的相关知识。命题 P 的逆命题和命题 P 的否命题互为逆否命题，而互为逆否命题的两个命题同真同假。故本题选 A。

二、简答题

9.【参考答案】

本题考查函数的导数及正切函数的相关知识。

由题意可知， $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x$ ，令 $f'(x) = 0$ ，

则 $-3\sin x + 4\cos x = 0$ ，所以 $\tan x = \frac{4}{3}$ 。

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且正切函数是周期为 π 的函数，

所以使得 $f'(x) = 0$ 的点为 $x = \arctan \frac{4}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 。

10.【参考答案】

本题考查在矩阵作用下的坐标变换。

由已知得， $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 5x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ，即 $\begin{cases} 2x+y=x' \\ 5x+2y=y' \end{cases}$ ，解此关于 x, y 的二元一次方程组得

$$\begin{cases} x = -2x' + y' \\ y = 5x' - 2y' \end{cases}$$

因为 $xy=1$ ，所以有 $(-2x'+y')(5x'-2y')=1$ ，整理得 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 满足的方程为 $10x'^2 - 9x'y' + 2y'^2 = -1$ 。

11.【参考答案】

本题考查微分中值定理。

当 $x_1=x_2$ 时结论显然成立。不妨设 $x_1 < x_2$ ，则函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上连续，在区间 (x_1, x_2) 上可导，由拉格朗日中值定理可得，存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$ ，使得 $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$ 。即有 $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2|$ 。

因为 $f'(x)$ 有界，故存在 $M > 0$ ，对任意 $x \in [0, 1]$ 都有 $|f'(x)| \leq M$ ，所以 $|f'(\xi)| \leq M$ 。

故 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ 。

12.【参考答案】

日常数学教学中通过对学生学习的评价，教师可以更好地关注学生的学习过程。教师不仅能够关注到学生对知识技能掌握的程度，还可以关注到学生的思维过程。教师可以根据学生在学习过程中的表现判断学生是否会用数学的眼光观察世界，是否会用数学的思维思考世界，是否会用数学的语言表达世界。

日常数学教学中对学生学习过程中的表现、所取得的成绩以及所反映出的情感、态度、策略等方面的发展

做出的评价,其目的是激励学生学习,帮助学生有效调控自己的学习过程,使学生获得成就感,增强自信心,培养合作精神。

同时,通过对学生学习的评价,教师可以了解教学过程中存在的问题和改进的方向,及时修正和调整教学目标、内容和计划。

13.【参考答案】

基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a, b \geq 0$) 的几何解释

如图 1, AB 是圆 O 的直径, C 是 AB 上一点, 且 $AC=a, BC=b$, 过 C 作 AB 的垂线交圆于点 D , 连接 AD, BD 。易知 $\triangle ACD \sim \triangle DCB$, 所以 $CD^2 = AC \cdot BC$, 即 $CD = \sqrt{ab}$ 。又 $OD = \frac{AB}{2} = \frac{a+b}{2}$ 。

根据几何图形知, $CD \leq OD$, 当且仅当点 C 和圆心 O 重合, 即 $AC=BC$ 时, 有 $CD=OD$, 如图 2 所示。所以有 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

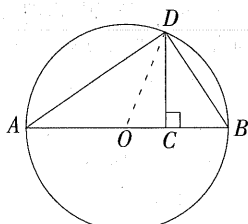


图 1

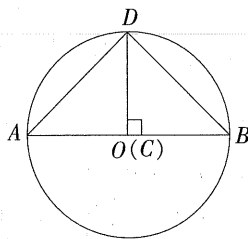


图 2

几何解释对学生数学学习的作用

(1) 有助于学生直观地理解数学问题。几何解释把复杂、抽象的数学问题变得简明、形象, 可以帮助学生直观地理解数学问题, 了解数学问题的几何背景或几何意义。

(2) 有助于加深学生对定理、公式等数学知识的理解。在定理、公式的学习上, 几何解释可以很好地帮助学生理解其本质含义, 通过追本溯源, 加深学生对定理、公式的记忆和把握。

(3) 有助于激发学生的数学学习兴趣。运用几何解释来解决数学问题, 可以将直观上枯燥、复杂的数学问题转化为形象、有趣的图形问题。这样可以避免学生对于数学学习的厌烦感, 激发学生学习数学的兴趣, 从而使学生不再惧怕数学, 增强其学好数学的信心。

(4) 有助于探索解决问题的思路, 预测结果。几何解释可以配合教师运用启发式教学, 帮助学生探索拓展解决问题的思路, 引导学生多方向思考解决问题的途径, 预测数学问题的结果。

(5) 有助于培养数形结合的数学思想。教师在教学过程中通过几何解释渗透数形结合思想, 帮助学生在数学学习的过程中逐步形成数形结合思想。

三、解答题

14.【参考答案】

本题考查连续型随机变量函数的分布函数的求解。

因为 $0 \leq \xi \leq 1$, 所以 $0 \leq \xi^2 \leq 1$ 。

当 $x < 0$ 时, $P\{\xi^2 \in (-\infty, x)\} = P\{\xi^2 \leq x < 0\} = 0$;

当 $x > 1$ 时, $P\{\xi^2 \in (-\infty, x)\} = 1$;

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $P\{\xi^2 \in (-\infty, x)\} = P\{\xi^2 < x\} = P\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\} = P\{-\infty < \xi < \sqrt{x}\} - P\{-\infty < \xi < -\sqrt{x}\} = P\{-\infty < \xi < \sqrt{x}\} = \sqrt{x}$ 。

$$\text{所以 } P\{\xi^2 \in (-\infty, x)\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

四、论述题

15.【参考答案】

(1)信息技术在数学教学中的作用

①信息技术可以为师生提供丰富的信息资源。教师将信息技术与数学教学相结合,利用丰富的数学教学资源,拓展知识视野,改变传统的学科教学内容,使教材“活”起来。学生通过信息技术进行辅助学习,把数学学习由课内延伸到课外,在开阔知识视野、丰富课余知识的同时,也培养了自主探究知识的能力。

②利用信息技术可以优化数学课堂教学效果,提高教师的课堂教学效率。在数学教学的过程中运用信息技术,不仅可以使学生难懂、教师难教的数学知识变得简单化、形象化,还可以方便教师更好地突破知识的重难点,帮助学生对知识的优化和巩固。教师利用信息技术,通过多媒体课件向学生展示板书内容,可以节省教师在课堂上书写的时间,从而提升教学课堂的教学效率。

③利用信息技术展示知识的形成过程,可以将抽象的知识直观化。利用现代信息技术图、文、声、像、影并茂的特点创设逼真的教学环境,可以把教学中只靠挂图或黑板作图而难讲解清楚的知识,通过形象生动的画面、声像同步的情境将知识的形成过程充分体现出来。如在空间与图形的教学中,借助多媒体课件,可以使学生在直观地观察中形成几何概念的表象,使其形成清晰的概念,从而培养学生的观察能力和思维能力。

④利用信息技术可以激发学生数学学习的兴趣,使其深入浅出地理解、掌握数学知识。通过信息技术将一些数学背景、数学史等相关知识在数学课堂上展示出来,一方面,配合教师数学课堂导入法中的趣味导入法,激发学生学习数学的兴趣;另一方面,方便教师将相关知识分解和拓展,从而加深学生对于数学知识的理解和进一步掌握。例如,教师在教学“勾股定理”时,可以通过课件形象化地引入毕达哥拉斯发现“勾股定理”的背景以及赵爽弦图的内容,既丰富了学生对于数学史的了解,加深其对定理的认识,又使学生感受数学学习的趣味性。

(2)信息技术与其他教学手段的关系

①教师在教学时应将信息技术和其他教学手段相结合,取长补短,根据不同的教学特点、不同的内容合理地选用教学手段。传统的教学手段,如教科书,板书,图形模具等,在长期的教学实践中发挥着重要的作用。随着科学技术的发展,信息技术应运而生,成为现代教学中必不可少的工具。信息技术给数学教学提供了大量信息和多种手段,对数学学科教学内容、教学方法和学习方法等产生了深远的影响。

②教师在教学时应充分发挥信息技术的辅助作用,而非主体作用。信息技术的真正价值在于实现原有教学手段难以达到,甚至达不到的效果。但信息技术并不能完全替代原有的教学手段。传统的教学手段依然是现代课堂教学中必备的工具和手段。教师应将信息技术与教学模具进行结合,让学生动手参与其中,使学生获得全面的学习和发展。因此,教师要从实际出发,适时、适量、适度 and 适龄地利用信息技术,让信息技术真正为课堂服务的同时发挥其与常规教学手段的各自优势,相互促进、相辅相成。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)与集合相关的知识点包括①元素与集合的概念;②元素的确定性(即给定的集合,它的元素必须是确定的)和互异性(一个给定集合的元素是互不相同的);③集合相等的概念;④集合与元素的字母表示;⑤元素与集合的关系以及记法;⑥判断元素是否属于集合。

(2)设置思考2的主要目的是引导学生体会集合的“确定性”和“互异性”,进而更好地理解集合的含义。教材在思考2前讲述了在了解集合的含义时要考虑集合中元素的确定性和互异性。只有理解了集合的这两条性质才能够判断什么是集合,什么不是集合。思考2中描述的两类元素:“大于3小于11的偶数”满足这两条性质,能够组成集合;“我国的小河流”不满足这两条性质,不能组成集合。学生在思考中充分体会了这两条性质,也对集合的含义有了更为深刻的理解。

(3)集合在高中阶段的数学课程中具有十分重要的地位。集合是高中阶段数学课程引入的第一个概念,是整个高中数学课程内容的基础,集合的初步知识与后续内容的学习有着密切的联系。集合是学习、掌握、使用数学语言的基础,集合形象化地将生活实际问题用数学符号表示出来,从而简化了用数学分析实际问题的语言,为相关数学知识奠定一定的理论基础。许多重要的高中数学内容如函数、方程、不等式、立体几何、解析几何、概

率统计等都需要用集合的语言来表述相关问题,集合对这些内容的后续学习均发挥了显著作用。

集合作为高中数学中基础且必需的数学语言,在高中数学课程中具有以下几点作用。

①培养学生运用数学语言学习数学、进行交流的能力。高中数学课程只将集合作为一种语言来学习,符合高中学生的认知水平。在此基础上,通过对集合知识的教学,很好地培养了学生用数学语言描述生活实例,交流实际问题的能力。

②为后续高中数学知识的学习奠定知识基础、提供分析问题的方法。集合语言具有简洁、明确的特性,并且可以清晰地表达事物之间的关系,为后续高中数学知识的学习奠定十分重要的语言基础。此外,集合知识很好地为师生提供分析问题的简便方法,如韦恩图(集合的表示法之一)可以直观清晰地表达事物之间的关系,在后续高中阶段概率统计内容的学习中,概率事件之间的关系就用到韦恩图的内容来进行分析。

③帮助学生进行思维过渡,从而开始自主学习的体验。集合内容抽象程度较高,蕴含着丰富的数学思想,并且有其独特的符号和表达方法,对学生的理解能力有一定的要求。因此,集合作为高中数学课程的第一个内容,可以帮助刚进入高中阶段的学生进行思维过渡。学生以此为“跳板”,提高抽象思维能力,为后续数学内容的学习开启新的体验。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)导入活动

利用多媒体播放一组学生课前收集的图片(旗杆与地面垂直、教学楼与地面垂直等),组织学生观察图片中事物之间的位置关系。

提出问题:利用所学的直线与平面垂直的定义观察旗杆与地面、教学楼与地面的位置关系是什么?

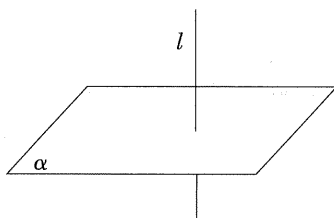
预设学生回答:垂直关系。

教师带领学生一起回忆直线与平面垂直的定义:如果一条直线与一个平面内的任意一条直线都垂直,就说这条直线与此平面互相垂直。

提出问题:你能否画出直线与平面垂直的几何图形?

预留时间供学生动手作图。

教师板书:

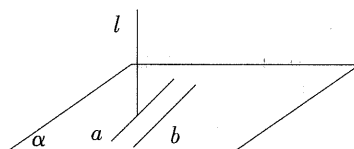
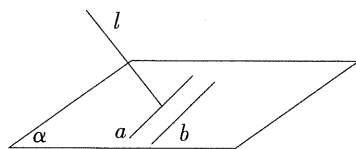


提出问题:①如果直线 l 与平面 α 内一条直线垂直,那么直线与平面是否垂直?

②如果直线 l 与平面 α 内两条直线垂直,那么直线与平面是否垂直?

预留时间供学生思考交流,之后教师带领学生共同探究。

教师板书问题中相应的几何图形:



提出问题:直线 l 与平面 α 内的直线 a 垂直,直线与平面是否垂直?直线 a 与直线 b 平行,则直线 l 与直线 b 也垂直,即直线与平面内两条平行直线垂直时,直线与平面垂直吗?

预设:直线与平面内一条直线垂直时,直线与平面不一定垂直;直线与平面内两条平行直线垂直时,直线与

平面不一定垂直。

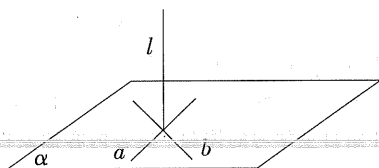
提出问题：两条直线除了平行还有什么位置关系？

预设：两条直线的位置关系还有相交。

提出问题：直线 l 与平面 α 内的两条相交直线垂直，直线与平面垂直吗？

预留时间供学生思考讨论。

教师板书几何图形：

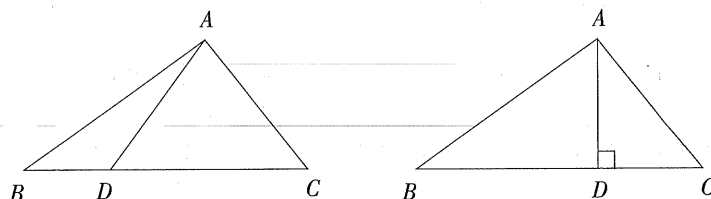


预设猜想：一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直。

教师带领学生探究猜想。

教师：请同学们拿出准备好的一块（任意）三角形的纸片，我们一起来做一个实验。过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 翻折纸片，得到折痕 AD ，将翻折后的纸片竖起放在桌面上，（ BD, DC 与桌面接触）。请同学们观察思考、动手实践，探究折痕 AD 与桌面是否垂直？如何翻折才能使折痕 AD 与桌面所在的平面垂直？

学生自主探究之后教师板书：



提出问题：由 $AD \perp BC$ ，按照上述翻折之后可以得到什么？ BD 与 CD 是什么关系？

预设： $AD \perp BD, AD \perp CD$ ， BD 与 CD 相交于点 D 。

提出问题：大家观察此时折痕 AD 与桌面所在的平面垂直吗？

预留时间供学生观察感受。

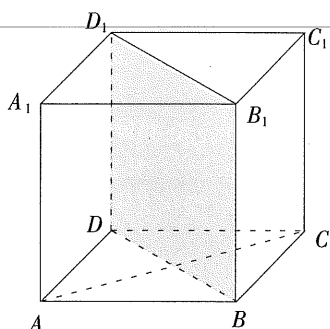
教师总结：当 $AD \perp BD, AD \perp CD$ 时， AD 与桌面垂直。也就是，若一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直。这就是直线与平面垂直的判定定理。

【设计意图】在教学中，充分发挥学生的主观能动性，先安排学生课前收集大量图片以感知数学与生活的联系，然后带领学生复习旧知，帮助学生建立起新旧知识之间的联系；通过学生动手画图、讨论交流和教师板书，使其经历从实际背景中抽象出几何概念的全过程，提高学生分析问题的能力；在教学过程中运用启发式层层设问，培养学生自主探究、独立思考的学习习惯；通过折纸实验引导学生分析猜想内容，形象感知“直线与平面内两条相交直线垂直”，并以此为基础进行合情推理，进而验证猜想，这一过程符合学生思维认知过程，通过几何直观分析定理内容，培养学生数形结合的数学思想。

(2) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，

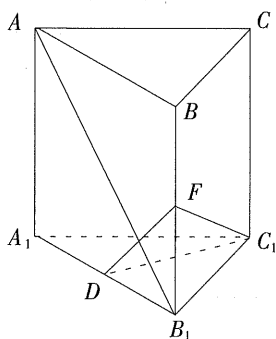
①判断直线 AC 是否与平面 CC_1D_1D 垂直？直线 AC 是否与平面 BB_1D_1D 垂直？并说明理由。

②你还能找出几组直线与平面垂直的关系？请分别列出并说明理由。



【设计意图】利用常见的正方体模型,创设问题情境组织学生利用已学定理进行证明判断,一方面,学生对于正方体各边的关系掌握得比较好,正方体中直线与平面的关系比较直观;另一方面,为加深学生对定理的理解,题目不应拔高,此题简单易懂可以很好地帮助学生加深对于定理的理解。

(3)如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=1$, $AA_1=\sqrt{2}$, D 是 A_1B_1 的中点。



①求证: $C_1D \perp$ 平面 AA_1B_1B ;

②当点 F 在 BB_1 上什么位置时,会使得 $AB_1 \perp$ 平面 C_1DF ? 请说明理由。

【设计意图】本题分设两问,第一问既涉及直线与平面垂直的定义,又涉及直线与平面垂直的判定定理,将新旧知识很好地结合在一起,加强了学生对新旧知识之间联系的掌握;第二问换个视角考查直线与平面垂直的判定定理,即给出垂直关系找使其成立的条件,可以帮助学生进一步巩固新知内容,使其更加熟练地掌握并运用新知。