

2019 年上半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。解析：本题考查有理数与无理数的性质。(1)有理数与有理数：和、差、积、商均为有理数(求商时分母不为零)。(2)有理数与无理数：①一个有理数和一个无理数的和、差为无理数；②一个非零有理数与一个无理数的积、商为无理数。(3)无理数与无理数：和、差、积、商可能是有理数，也可能是无理数。故本题选 A。

2.【答案】B。解析：本题考查空间曲线的方程。由
$$\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = a \sin^2 t, \\ z = a \sin 2t \end{cases}$$
 可得 $x+y=a\cos^2 t+a\sin^2 t=a, z^2=a^2(2\sin t \cos t)^2=4xy$, 所以将参数方程化成一般方程为
$$\begin{cases} x+y=a, \\ z^2=4xy. \end{cases}$$
 故本题选 B。

3.【答案】D。解析：本题考查直角坐标与球坐标变换、空间曲面方程。

(方法一)设球坐标中任意一点 $P(\rho, \theta, \varphi)$, 根据题目中空间直角坐标与球坐标的变换公式可知, ρ 表示原点 O 与点 P 之间的径向距离, θ 表示 OP' 到 OP 的有向角, 其中 OP' 是 OP 在 xOy 坐标面上的投影, φ 表示 Ox 轴到 OP' 的有向角, 如图 1 所示。因此, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 表示以原点为顶点, 以射线 OP 为母线, 以 z 轴为中心轴的半锥面, 如图 2 所示。故本题选 D。

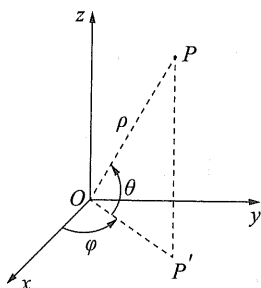


图 1

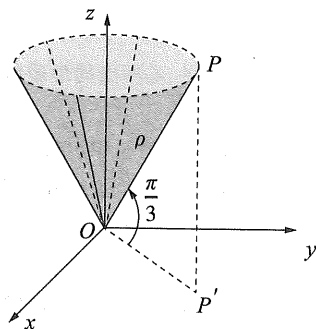


图 2

(方法二)将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入到
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$
 得
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \rho \cos \varphi, \\ y = \frac{1}{2} \rho \sin \varphi, \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho. \end{cases}$$
 消去参数整理得 $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$, 该方程是由 yOz 平面上的射线 $z = \sqrt{3}y (y > 0)$ 绕 z 轴旋转得到的, 它表示以原点为顶点, 以射线 $z = \sqrt{3}y (y > 0)$ 为母线, 以 z 轴为中心轴的半锥面。故本题选 D。

4.【答案】C。解析：本题考查矩阵初等变换及行列式的性质。对矩阵可以作如下三种初等行(列)变换：①交换矩阵的两行(列)；②将一个非零数 k 乘到矩阵的某一行(列)；③将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上。若方阵 A , 经过以上三种初等变换得到方阵 B , 则对应的行列式的关系依次为 $|A| = -|B|$, $|A| = k|B|$, $|A| = |B|$ 。即 $|A| = a|B|$, $a \in \mathbb{R}$ 。所以 $|A| = 0$ 时必有 $|B| = 0$ 。故本题选 C。

5.【答案】B。解析：本题考查泰勒展开式的相关知识。因为 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots =$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, 所以 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} (\pi x)^{2n-1} = \sin \pi x$, $f(1) = \sin \pi = 0$ 。故本题选 B。

6.【答案】C。解析：本题考查矩阵的相似对角化的相关知识。由题意可知，矩阵 A 可以相似对角化，且 $\lambda=2$ 对应两个线性无关的特征向量，所以 $(2E-A)x=0$ 有两个线性无关的解，即有 $3-r(2E-A)=2$ ，所以 $r(2E-A)=1$ 。 $2E-A=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{要使 } r(2E-A)=1, \text{ 则有 } \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{y}, \text{ 可得 } x=2, y=-2. \text{ 故本题选 C.}$$

7.【答案】A。解析：直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形，理解和解决数学问题的素养。主要包括：借助空间形式认识事物的位置关系、形态变化与运动规律；利用图形描述、分析数学问题，建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路。④中的描述属于数学建模素养。

8.【答案】A。解析：演绎推理是从一般规律出发，运用逻辑证明或数学运算，得出特殊事物应遵循的规律，即从一般到特殊的推理。归纳推理是由个别、特殊到一般的推理，通过实验验证结论和通过观察猜想得到结论的推理都是归纳推理。故本题选 A。

二、简答题

9.【参考答案】

本题考查统计的相关知识。

(1) 根据中位数的定义可知，甲组同学脱粒数量的中位数是 $\frac{75+75}{2}=75$ ，乙组同学脱粒数量的中位数是

$$\frac{68+69}{2}=68.5.$$

(2)①通过两组数据能够求出甲、乙两组同学脱粒数量的平均值 $\bar{x}_{\text{甲}}=74.6$, $\bar{x}_{\text{乙}}=71.65$ ，根据平均数的大小比较可知，甲组脱玉米速度更快。

②根据两组数据的波动情况，能够看出甲组数据更为稳定，而乙组数据波动很大。进而可知，甲组学生的脱玉米能力差不多，而乙组学生脱玉米的能力存在很大的个体差异性。也可以理解为，甲组同学在实践活动中的参与性与积极性要高于乙组同学在实践活动中的参与性与积极性。

10.【参考答案】

本题考查空间直线的位置关系、异面直线之间的距离的计算。

根据直线的方程可知，直线 l_1 的方向向量 $s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$ ，直线 l_2 的方向向量 $s_2 = (2, 1, 1)$ 。在 l_1

中令 $y=0$ ，可得 l_1 过点 $M_1=(-1, 0, -1)$ ，又 l_2 过点 $M_2(1, -1, 0)$ ， $\overrightarrow{M_1M_2}=(2, -1, 1)$ 。因为混合积 $(s_1 \times s_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ 即向量 } s_1, s_2, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ 不共面, 所以直线 } l_1 \text{ 与直线 } l_2 \text{ 异面.}$$

直线 l_1 与直线 l_2 的公垂线的方向向量 $l = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 3)$ ， $\overrightarrow{M_1M_2}=(2, -1, 1)$ ，则两直线之间的

距离等于向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在向量 l 方向上的投影的长度，即 $d = \left| \frac{l \cdot \overrightarrow{M_1M_2}}{|l|} \right| = \frac{|-2|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$ 。

11.【参考答案】

(1) 设三次多项式的表达式为 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 根据题意得,
$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3, \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 3, \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 15, \end{cases} \quad \text{解得 } a_3 = 1, a_2 = 2, a_1 = -1,$$

 $a_0 = 1$, 所以 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

(2) 平面上 n 个横坐标不同的点唯一确定的多项式函数的最高次数是 $n-1$.

设多项式 $g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 的图像经过 $P_i(x_i, y_i) (i=1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$\begin{cases} a_{n-1}x_1^{n-1} + a_{n-2}x_1^{n-2} + \cdots + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1, \\ a_{n-1}x_2^{n-1} + a_{n-2}x_2^{n-2} + \cdots + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2, \\ \vdots \\ a_{n-1}x_n^{n-1} + a_{n-2}x_n^{n-2} + \cdots + a_2x_n^2 + a_1x_n + a_0 = y_n, \end{cases}$$

这是一个关于 $a_i (i=0, 1, \cdots, n-1)$ 的非齐次线性方程组, 它的系数矩阵对应的行列式为 n 阶范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

因为 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 所以此行列式不等于 0. 由克拉默法则得, 该线性方程组有唯一解, 即存在唯一的一组数 $a_i (i=0, 1, \cdots, n-1)$. 所以由这 n 个点所唯一确定的多项式函数的最高次数是 $n-1$.

12.【参考答案】

高中数学课程的基础性的具有以下几点含义。

① 高中数学课程在课程内容上包含了数学中最基本的部分。在义务教育阶段之后, 为满足需求给学生提供更高水平的数学基础, 面向全体学生提供了学生现阶段学习及未来发展所需要的数学基础知识, 为学生的未来发展奠定基础。

② 高中数学课程为学生进一步学习提供了选修内容。例如, 高中数学设有选修与必修课程, 必修课程是为了满足所有学生的共同数学需求, 选修系列课程是为了满足学生的不同数学需求, 它仍然是学生发展所需要的基础性数学课程。

③ 高中数学课程为学生适应未来社会生活、高等教育和职业发展等提供必需的数学基础。例如, 大学阶段理工科类的学生需要更多的数学知识, 而高中数学课程为大学数学的学习提供了必备的基础知识。

④ 高中数学课程也为学生学习其他学科的课程, 如高中物理、化学、技术等, 提供了必要的知识准备。

13.【参考答案】

数学学习评价的形式多样, 主要有口头测验、书面测验、开放式问题研究、活动报告、课堂观察、课后访谈、课内外作业、建立成长记录袋等。下面列举几种不同的评价方式进行阐述。

① 口头测验, 是指在教学过程中教师通过与学生之间的言语互动, 及时地了解学生的数学学习情况, 找出问题并及时纠正。

② 书面测验, 是指教师对学生的作业或者其他测验报告所做的书面性的评价。这种评价方式可以帮助教师了解学生的数学学习状态以及知识掌握水平。

③ 书面评语评价, 教师对学生的作业或者其他活动报告所做的书面性的评价。评价形式不仅仅是分数或者等级, 评语一般以鼓励为主, 用以帮助学生认识与解决问题。

④ 课后访谈, 是指教师通过课后与学生的沟通交流了解学生数学学习情况的一种评价方式。这种评价方式可以帮助教师更直接地了解到学生的数学学习情况。

⑤建立成长记录袋,是指将学生数学学习过程进行有效记录而形成的书面存档。这种评价方式既可以帮助师生随时了解学生数学学习的成长经历,也可以有效地帮助学生确立今后的学习目标与方向。

三、解答题

14.【参考答案】

(1)证明:设 $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上任意的两点,则 $T(P)=T((x_P, y_P))=(\frac{1}{2}x_P, \frac{1}{3}y_P), T(Q)=T((x_Q, y_Q))=(\frac{1}{2}x_Q, \frac{1}{3}y_Q)$ 。 $d(T(P), T(Q))=\sqrt{(\frac{1}{2}x_P-\frac{1}{2}x_Q)^2+(\frac{1}{3}y_P-\frac{1}{3}y_Q)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(x_P-x_Q)^2+\frac{1}{9}(y_P-y_Q)^2}\leq\sqrt{\frac{1}{4}(x_P-x_Q)^2+\frac{1}{4}(y_P-y_Q)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}=\frac{1}{2}d(P, Q)$,即存在满足题意的 $\rho=\frac{1}{2}$,所以映射 T 是压缩映射。

(2)(方法一)设 $O(0, 0)$ 为欧氏平面的原点。当 P_0 是原点时,显然 $P_n(0, 0)$,所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n=O$ 。当 P_0 不是原点时,因为 $T(O)=O$,依据(1)中的计算,有 $d(P_n, O)\leq\frac{1}{2}d(P_{n-1}, O)$,记 $d(P_n, O)=r(r>0)$,则 $d(P_n, O)\leq(\frac{1}{2})^n r$ 。对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N=\log_2 \frac{r}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,有 $d(P_n, O)\leq(\frac{1}{2})^n r<\varepsilon$,所以由柯西准则知,点列 $\{P_n\}$ 收敛,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n=O$ 。

(方法二)由于 $P_n=T(P_{n-1})=T(T(P_{n-2}))=\cdots=T^n(P_0)=(\frac{1}{2^n}x_0, \frac{1}{3^n}y_0)$,因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}x_0=0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}y_0=0$,所以点列 $\{P_n\}$ 收敛,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n=(0, 0)$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

函数是中学数学课程的主线,它贯穿于整个中学数学课程中,方程、不等式、数列等内容均与函数有非常密切的联系。

(1)函数与方程。中学数学课程中一元二次方程的求解问题,可以转化成求对应函数的零点问题。例如,求方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的实数根,可以转化为求函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标的值,即求函数的零点问题。由此可以看出,方程可看作函数的局部性质,求方程的根就变成了思考函数图像与 x 轴的交点问题。利用函数的整体性质可以研究方程的根的性质,判断根的个数,并估计根所在的区间。

(2)函数与不等式。用函数的观点看,不等式的解集就是使函数图像 $y=f(x)$ 在 x 轴上方或下方的 x 的区域。中学数学课程中的一元二次不等式的求解问题,可以借助二次函数的图像找到不等式的解集。例如,求不等式 $x^2-3x+2>0$ 的解集,可以通过画出函数 $f(x)=x^2-3x+2$ 的图像找到使函数值大于 0 的所有 x 组成的集合,而这个集合就是该不等式的解集。

(3)函数与数列。数列是一种特殊的函数,它的定义域为自然数集或自然数集的子集。数列是离散的函数,表现在坐标系中是一些离散的点的集合。中学数学课程主要涉及等差数列和等比数列,等差数列的通项公式是一次函数的离散化,等差数列的前 n 项和公式是二次函数的离散化,等比数列的通项公式以及前 n 项和公式都是指数函数的离散化,因此可以借助函数的性质来研究数列。例如,求等差数列的前 n 项和 $S_n=n^2-4n$ 在第几项取得最小值,可以将其转化为求函数 $f(x)=x^2-4x$ 的顶点横坐标问题,根据函数的顶点坐标公式可知,当 $x=2$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值,即 S_n 在第 2 项取得最小值。

总之,在方程、不等式、数列等内容中,可以用函数思想思考、解决问题,用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)课堂提问要遵循目的性、启发性、适度性、兴趣性、循序渐进性、全面性、充分思考性、及时评价性等八个原则。

A 教师的课堂提问中遵循了目的性、循序渐进性、充分思考性等几个原则。但没有遵循启发性、适度性、兴

趣性、全面性、及时评价性等原则。首先,A 教师提出的问题相对比较难,比较抽象,适合中等以上的学生,没有考虑全体学生的水平,所以违背了适度性和全面性原则。其次,在 A 教师的教学中,例子相对较少,更多的是直接提问知识层面上的问题,让学生直接思考,没有考虑从学生的兴趣出发,调动学生的积极性。最后,A 教师在教学中没有体现出对学生的回答及时做出评价。

B 教师在课堂提问中遵循了目的性、启发性、适度性、兴趣性、循序渐进性、充分思考性、全面性等原则,但没有遵循及时评价性原则。B 教师在整个教学过程中,充分的利用例子,通过循序渐进的提问,帮助学生一步一步的理解函数的零点概念以及方程的根与零点之间的关系。但是在提问的过程中,B 教师没有对学生的回答及时做出评价。在教学中,对学生的表现要及时的予以评价,才能够保证学生与教师的快速成长。

(2)A 教师的概念引入部分的提问没有遵循循序渐进的原则,问题的设置要考虑学生的认知水平,问题的设置应该由浅入深,由易到难。建议 A 教师应该先提问:同学们,在初中你是如何判断一个方程是否有实数根的?(回顾之前学过的方法)用初中的方法能判断方程 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 是否有实数根吗?(引发学生的认知冲突)回顾一下初中的时候一元二次方程与对应的二次函数之间有什么关系呢?(引导学生思考方程和函数之间的关系)

B 教师的概念引入虽然给出了三组实例,但还需在函数的类型上进行改进,不单单只呈现一元二次方程及其对应的二次函数,还可以增加一次方程及其对应函数让学生进行观察。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)①问题一:生活中,在检测某食品卫生达标情况时,食品卫生工作人员一般抽取部分该食品进行检测。你认为这种抽样方法科学吗?你还能举出生活中需要运用这种抽样方法的其他例子吗?

【设计意图】让学生初步了解生活中需要运用统计方法的实例,可以使其了解简单随机抽样方法的价值。让学生举出其他生活实例,可以培养学生提出问题、发现问题的能力,并使其深切感受到随机抽样方法在解决实际问题中的重要性。

问题二:某校领导要了解全校学生的视力情况(近视和不近视),随机抽取 50 名学生,统计出这 50 名学生的视力情况,最后估计出全校学生的视力情况。你认为这种抽样方法有什么优缺点?在随机抽取的过程中应该注意什么?

【设计意图】该问题一方面可以使学生初步了解简单随机抽样这一抽样方法,并感受其实际意义;另一方面使学生自主探究简单随机抽样方法需要注意的问题等,可以培养其发现问题和解决问题的能力。

②实例:经消费者反映,某食品店小包装饼干存在细菌超标问题。针对该问题,食品卫生工作人员需要对该食品店小包装饼干进行卫生达标检验。但是,若食品卫生工作人员对该食品店所有小包装饼干进行逐一检测,将面临巨大的工作压力。因此,食品卫生工作人员只随机抽取该食品店部分饼干进行卫生检测。

【设计意图】将实际生活问题作为实例进行教学,不仅可以使学生对简单随机抽样方法有更深入的理解;还可以使其感受在面对总体数量较多时,简单随机抽样方法的重要性。

③师:在 1936 年美国总统选举前,某杂志工作人员做了一次民意测验,即调查兰顿和罗斯福谁将成为美国的下一届总统。该调查者通过电话簿和车辆登记簿上面的名单(只有少数富人拥有)给一大批人发了调查表,通过分析调查表数据,从而做出预测。

问题一:该杂志工作人员运用了什么抽样方法?研究的总体和样本分别是什么?该抽样方法具有什么特征?

【设计意图】结合生活实际描述问题情境并设置问题,加深学生对简单随机抽样方法的理解,使其进一步明确简单随机抽样的特征,并巧妙地后面问题做铺垫。

师:该杂志工作人员做出的预测是兰顿将在选举中获胜。但实际情况是,罗斯福在选举中获胜。

问题二:你知道该杂志的工作人员的预测为什么是错误的吗?分析该工作人员的抽样样本可以发现什么?该样本是否具有代表性?

【设计意图】颠覆性的结果,引出抽样问题。使学生自主思考和探究问题,可以培养学生独立思考问题的习惯以及发现问题的能力。

师：该抽样样本中涉及的调查者是富人阶层，只占有选票中的少数。所以该工作人员所抽取的样本不具有代表性。

——问题三：结合上述实例，在运用简单随机抽样方法抽取样本时，应该注意什么？除此之外，还应该注意什么？

【设计意图】通过实例使学生深刻理解样本是否具有代表性的重要性。此外，该问题进一步开拓学生的思维，从而达到总结出在简单随机抽样时需要注意的问题的目的。

——(2)①教学重点：让学生了解简单随机抽样方法的意义；理解简单随机抽样方法的定义；掌握简单随机抽样最常用的两种方法——抽签法和随机数法；灵活选择抽样方法。

②教学难点：学生初步接触“统计”内容，对于某些统计名词的理解不是很深刻；在运用简单随机抽样方法抽取样本的过程中，需要注意的问题难于理解；面对统计数据时，学生难于判断所选取的抽样方法是否合适。

③简单随机抽样是学生高中阶段接触“统计”的第一个知识点，统计知识的初步学习和统计思维的培养为后续教学内容奠定重要基础。后续内容有其他抽样方法，样本估计总体的相关内容，均涉及“总体”“样本”等概念，学生对这一内容的学习和掌握可以减轻后续学习内容的压力；学生在学习简单随机抽样的过程中感受其优缺点，为后续类比学习“系统抽样”“分层抽样”等抽样方法奠定重要基础；在学习运用“样本估计总体”的过程中均涉及统计方法，学生对简单抽样方法的学习可以为后续根据数据准确选取抽样方法做铺垫。