

2019 年下半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】A。解析:因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$,即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{ax} = 1 = b$ 。 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数等于右导数, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$, $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sin 2x - 1}{x} = 2$,即 $a = 2$ 。故本题选 A。

2. 【答案】A。解析:函数 $f(x)$ 的一阶导函数在 $x=0$ 处连续,则 $f'(0)$ 存在,且 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ 。由导数定义知 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}$,当 $n \leq 1$ 时,极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}$ 不存在,与题设矛盾,故应有 $n \geq 2$,此时 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} = 0$ 。因为当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = x^n \sin \frac{1}{x}$, $f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}$,所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} \cos \frac{1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} \cos \frac{1}{x}$,而当 $n=2$ 时,极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} \cos \frac{1}{x}$ 不存在,此时一阶导函数在 $x=0$ 处间断;当 $n \geq 3$ 时, $-\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} \cos \frac{1}{x} = 0 = f'(0)$,此时一阶导函数在 $x=0$ 处连续。综上,正整数 n 的取值是 $n \geq 3$ 。故本题选 A。

3. 【答案】B。解析:因为 $M_1 M_2$ 垂直于平面 π_1 ,所以 $\vec{n} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (0, 1, 1)$ 是平面 π_1 的一个法向量,又平面 π_2 的一般方程为 $6x + y + 18z - 18 = 0$,所以 $\vec{m} = (6, 1, 18)$ 是平面 π_2 的一个法向量。记平面 π_1 与平面 π_2 的夹角为 θ ,则 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|0 \times 6 + 1 \times 1 + 1 \times 18|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \times \sqrt{6^2 + 1^2 + 18^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。故本题选 B。

4. 【答案】C。解析:由题知 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$,所以 $\vec{a} = -(\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{b} = -(\vec{a} + \vec{c})$,分别代入 $\vec{a} \times \vec{b}$ 得, $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}) = -(\vec{0} + \vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{c}$; $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times [-(\vec{a} + \vec{c})] = -(\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{c}) = -(\vec{0} + \vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \times \vec{a}$ 。故本题选 C。

5. 【答案】D。解析:矩阵的秩等于其行向量组的秩(行秩),也等于其列向量组的秩(列秩),而向量组的秩等于这组向量的一个极大线性无关组中所含向量的个数。由 $r(\vec{M}) = r < n$ 知,矩阵 $\vec{M}$ 的行向量组的一个极大线性无关组中含有 r 个向量,所以行向量中必有 r 个向量线性无关,且行向量组中任意一个向量都可以由这 r 个向量线性表出。但从行向量组中任取 r 个向量不一定能构成向量组的极大线性无关组,这 r 个向量可能线性相关,此时在向量组中至少存在一个向量不能被这 r 个向量线性表出。结合选项只有 D 项正确。

6. 【答案】C。解析:关于直线 $y=x$ 的反射变换是将平面上任意一点 (x_0, y_0) 映为 (y_0, x_0) ,根据矩阵乘法可得, $\begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$,所以关于直线 $y=x$ 的反射变换是 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。故本题选 C。

7. 【答案】D。解析:向量具有代数和几何双重属性,是沟通代数、几何的桥梁,是重要的数学模型。在高中阶段学习向量有助于学生体会数学与现实生活以及其他学科的联系,有助于学生理解数学运算的意义及价值,发展运算能力,有助于学生掌握处理几何问题的代数方法,体会数形结合思想,有助于增进学生对数学本质的理解,向量是解决数学问题的有效工具,向量知识的学习能提高学生的解题能力,向量在高中课程中有着广泛的实际应用价值。

8.【答案】B. 解析:数学中常用的推理有演绎推理、归纳推理和类比推理,其中归纳推理和类比推理都属于合情推理。合情推理是根据已有的事实和正确的结论(包括定义、公理、定理等)、实验和实践的结果,以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理。演绎推理是根据已有的事实和正确的结论(包括定义、公理、定理等),按照严格的逻辑法则得到新结论的推理。数学归纳法是一种数学证明方法,通常被用于证明某个给定命题在整个(或者局部)自然数范围内成立。虽然数学归纳法名字中有“归纳”,但是数学归纳法的推理方式并不属于归纳推理,它属于完全严谨的演绎推理。事实上,所有数学证明的推理方式都属于演绎推理。故本题选B。

二、简答题

9.【参考答案】

(1) 任取平面上一点 (x, y) , 设 (x, y) 在题中变换下的像为 (x', y') , 则有 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + 3 \\ \frac{1}{3}y + 5 \end{bmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 3, \\ y' = \frac{1}{3}y + 5, \end{cases} \text{ 则有 } \begin{cases} x = 2(x' - 3), \\ y = 3(y' - 5), \end{cases} \text{ 代入椭圆方程得 } \frac{4(x' - 3)^2}{4} + \frac{9(y' - 5)^2}{9} = (x' - 3)^2 +$$

$(y' - 5)^2 = 1$ 。故椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在题中变换下的曲线方程为 $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 1$ 。

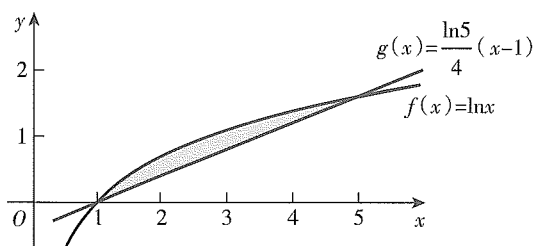
(2) 平面内任意两点的距离都可通过平移转化为原点到对应点 (x, y) 的距离, 不妨取原点 $(0, 0)$ 与点 $(2, 3)$ 。由(1)可得, $(0, 0)$ 在题中变换下的像为 $(3, 5)$, $(2, 3)$ 在题中变换下的像为 $(4, 6)$, 记两点在变换前的距离为 d , 变换后的距离为 d' , 则 $d = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $d' = \sqrt{(4 - 3)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{2}$, 显然在该变换下平面内两点的距离发生变化。

平面内任意直线(斜率存在)都可以通过平移转化为过原点的直线 $y = kx$ 。若 $k = 0$, 由(1)可得, 直线 $y = 0$ 在题中变换下的方程为 $3(y' - 5) = 0$, 即 $y = 5$, 斜率仍为0; 若 $k \neq 0$, 不妨令 $k = \frac{3}{2}$, 直线 $y = \frac{3}{2}x$ 在题中变换下的方程为 $3(y' - 5) = \frac{3}{2} \times 2(x' - 3)$, 即 $y = x + 2$, 斜率为1。综上, 在题中变换下斜率为0的直线的斜率不发生变化, 斜率不为0的直线的斜率发生变化。

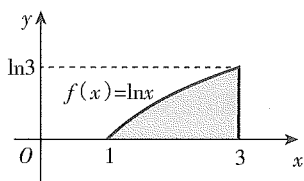
平面内两条相交直线, 不妨取直线 $y = 0$ 与直线 $y = \frac{3}{2}x$, 两直线相交于原点。 $y = 0$ 在题中变换下的方程为 $y = 5$, $y = \frac{3}{2}x$ 在题中变换下的方程为 $y = x + 2$, 变换后的两直线斜率不相等, 因此变换后的两直线相交, 故题中变换不改变直线间的相交关系。

10.【参考答案】

(1) 函数 $f(x) = \ln x$ 与函数 $g(x) = \frac{\ln 5}{4}(x - 1)$ 的大致图像如图所示, 图中两交点坐标为 $(1, 0)$, $(5, \ln 5)$, 阴影部分即为所求区域。由定积分的几何应用可知, 所围平面图形的面积 $S = \int_1^5 \left[\ln x - \frac{\ln 5}{4}(x - 1) \right] dx = \int_1^5 \ln x dx - \int_1^5 \frac{\ln 5}{4}(x - 1) dx = x \ln x \Big|_1^5 - \int_1^5 1 dx - \frac{\ln 5}{4} \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \Big|_1^5 = 5 \ln 5 - 4 - 2 \ln 5 = 3 \ln 5 - 4$ 。



(2) 画出平面图形 $0 \leq y \leq f(x) (1 \leq x \leq 3)$, 如图中阴影部分所示。



(方法一) 取 y 为积分变量。由 $f(x) = \ln x (1 \leq x \leq 3)$, 可得 $x = e^y (0 \leq y \leq \ln 3)$ 。曲边梯形 $0 \leq x \leq e^y (0 \leq y \leq \ln 3)$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体记为 Ω_1 , 根据旋转体体积公式得 $\Omega_1 = \int_0^{\ln 3} \pi (e^y)^2 dy = 4\pi$; 矩形 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq \ln 3 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体记为 Ω_2 , 它是底面半径为 3, 高为 $\ln 3$ 的圆柱体, $\Omega_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot \ln 3 = 9\pi \ln 3$ 。易知所求旋转体的体积 $V = V_{\Omega_2} - V_{\Omega_1} = (9\ln 3 - 4)\pi$ 。

(方法二) 取 x 为积分变量。取平面图形 $f(x) = \ln x (1 \leq x \leq 3)$ 的一个面积微元 $dS = \ln x dx$, 该微元绕 y 轴旋转一周得到一个空心圆柱体, 该空心圆柱体展开后近似地可以看成是一段长方体, 它的长为 $2\pi x$, 宽为 dx , 高为 $f(x)$, 所以空心圆柱体的体积近似为 $2\pi x \cdot f(x) \cdot dx = 2\pi x \ln x dx$, 即为旋转体体积的微元。所以所求旋转体的体积 $V = \int_1^3 2\pi x \ln x dx = \pi \int_1^3 \ln x dx^2 = \pi \left[x^2 \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 \right] = (9\ln 3 - 4)\pi$ 。

11.【参考答案】

取 5 次球, 最多取到 3 个白球的对立事件是取到 4 个白球或 5 个白球。设取到白球的数量为 X , 则 $P(X = 4) = \frac{C_8^4 C_8^1}{C_{16}^5} = \frac{5}{39}$, $P(X = 5) = \frac{C_8^5}{C_{16}^5} = \frac{1}{78}$, 故所求概率 $P(X \leq 3) = 1 - \frac{5}{39} - \frac{1}{78} = \frac{67}{78}$ 。

12.【参考答案】

数学文化在数学教学中主要有两方面的含义: 一是体现数学外部和内部联系的事物, 如与数学知识相关的数学史、数学家、数学在日常生活中的应用等; 二是蕴含于数学知识的形成和应用过程中的意识形态和精神领域的因素, 如数学思想、方法、精神、数学美等。数学课程中, 数学文化与数学教学密不可分, 以“勾股定理”和“‘杨辉三角’与二项式系数”的教学为例进行简要的阐述。

① 勾股定理

教师在讲授“勾股定理”一课时, 通过介绍毕达哥拉斯发现勾股定理的趣事: 相传 2500 多年前, 毕达哥拉斯有一次在朋友家做客时, 发现朋友家用砖铺成的地面图案反映了直角三角形三边的某种数量关系。由此引入“勾股定理”的探究活动: 引导学生结合正方形面积自主探究直角三角形三条边的关系。最后得到“勾股定理”。教师在讲授新课前向学生渗透相关数学史的过程就是数学教学中融入数学文化的充分体现, 同时对直角三角形三边关系的探究活动蕴含了丰富的数学思想、方法, 也是将数学文化融入数学课堂的体现。

② “杨辉三角”与二项式系数

教师在讲授二项式系数的性质 $C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r$ 时, 介绍法国数学家帕斯卡发现的“帕斯卡三角”以及中国数学家杨辉在《详解九章算法》中的“杨辉三角”的相关数学史, 向学生渗透相关数学文化。此外, 在教学过程中引导学生从函数的角度对二项式系数进行分析, 即将 C_n^r 看成是定义域为 $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, 以 r 为自变量的函

数 $f(r)$,对确定的 n 画出函数图像,以此探究二项式系数的相关性质。这一教学过程向学生渗透数形结合的思想,也是数学文化在数学课程中的体现。

13.【参考答案】

数学建模是对现实问题进行数学抽象,用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养。数学建模过程主要包括:在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题,分析问题、构建模型,确定参数、计算求解,检验结果、改进模型,最终解决实际问题。具体分析如下。

(1) 发现问题、提出问题:发现现实生活中的问题,通过搜集相关信息,了解所要研究的生活实际问题的背景,对问题进行简单明了的假设。

(2) 分析问题、构建模型:对问题进行全面分析,利用数学语言将现实问题抽象成数学问题,合理利用各种数学思想方法和数学工具建立一个简单而有相当实际意义的数学模型。

(3) 确定参数、计算求解:抓住可以解决问题的主要因素,确定想要关注的变量,采用数学方法或计算机技术对模型相关参数进行求解,并据此分析结果。

(4) 检验结果、改进模型:通过将模型所得结果与实际现象或数据进行比较,确定结果是否具有实际意义,对结果做出科学理性的评价;若模型与现实不符,则思考建模过程中有哪些因素未考虑或考虑不恰当,对此应予以修改或补充假设,重新建模。

三、解答题

14.【参考答案】

证明:由题知 $f(a) \cdot f(b) < 0$,所以 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,不妨令 $f(a) < 0, f(b) > 0$ 。记 $a_0 = a, b_0 = b$,若 $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) = 0$,则命题得证;若 $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) > 0$,则令 $a_1 = a_0, b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$;若 $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0$,则令 $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, b_1 = b_0$,以此类推可得两个序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$,满足 $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$,即 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = \frac{b-a}{2^n} = 0, f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$,所以由闭区间套定理可知,存在一点 $c \in [a, b]$,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ 。又 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,所以有 $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0, f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$,即 $f(c) = 0$,命题得证。

四、论述题

15.【参考答案】

数学课程应注重提高学生的数学思维能力,这是数学教育的基本目标之一。在数学的学习过程中,要不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明、反思与建构等思维过程。这些过程是数学思维能力的具体体现,有助于学生对客观事物中蕴涵的数学模式进行思考和做出判断。因此,在数学教学中应有意培养学生的数学思维能力。

培养学生的数学思维能力可以从以下几个方面入手。

(1) 设立恰当的教学目标,明确培养方向。

教师要深刻把握课堂教学要求,结合所讲授的知识内容,制定教学设计中的过程与方法目标,从而明确在教学过程中应培养学生的思维能力。

(2) 精心设计教学方案,注重创设生动的问题情境和组织富有趣味性的探究活动。

在教学之前教师应精心准备教学设计,对相关知识设计生动的问题情境,引导学生自主思考问题。此外,教师的设问要富有启发性和层次性,由浅入深,由简到难,符合学生的认知和思维过程。同时结合教学目标,设计富有趣味性的探究活动,在这一过程中培养学生应具备的数学思维。

(3) 在教学过程中,培养学生的合情推理和演绎推理的能力。

中学数学中几何证明等很多知识的学习都要结合推理进行探究。推理能力是数学思维能力的体现。因此,在数学教学中,教师应鼓励学生运用合情推理,大胆猜想,之后引导学生运用演绎推理的相关方法对猜想

进行证明。在这一过程中,教师既要向学生渗透相应的数学思想,还应引导学生运用正确、适当的数学思想解决相应数学问题。

(4) 在作业中设计灵活多元的练习,锻炼学生的思维能力。

教师要根据具体教学内容对作业的内容和形式进行改革和创新,融入更多富有趣味性、探索性的元素,让学生在课后习题的练习中,既可以巩固所学的课堂知识,又能够对课堂知识进一步拓展延伸,从而达到启发学生的思维,激发其学习兴趣的目的。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 该学生没有考虑直线 l 的斜率不存在的情况。可能出现的原因有以下几点:

- ① 该学生忽略了直线点斜式方程的局限性(点斜式方程不能表示斜率不存在的直线);
- ② 该学生对分类讨论思想的运用不熟练;
- ③ 该学生对圆与直线的位置关系考虑得不全面。

正确解法如下(这里给出三种解法):

解法一

① 当直线 l 的斜率不存在时,根据题意所求直线 l 的方程为 $x = 2$;

② 当直线 l 的斜率存在且设为 k 时,其方程为 $y - 3 = k(x - 2)$,即 $kx - y - 2k + 3 = 0$,根据题意知,圆心 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{|k - 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$,解得 $k = \frac{4}{3}$,进而可得所求直线 l 的方程为 $4x - 3y + 1 = 0$ 。

综上,所求直线 l 的方程为 $x = 2$ 或 $4x - 3y + 1 = 0$ 。

解法二

① 当直线 l 的斜率不存在时,根据题意所求直线 l 的方程为 $x = 2$;

② 当直线 l 的斜率存在且为 k 时,其方程为 $y - 3 = k(x - 2)$,将直线和圆的方程联立:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ y-3 = k(x-2), \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } (1+k^2)x^2 + (-4k^2+6k-2)x + 4k^2-12k+9 = 0, \text{ 由于直线和圆相切,所以令}$$

$$\Delta = 0, \text{ 得到 } (-4k^2+6k-2)^2 - 4(1+k^2)(4k^2-12k+9) = 0, \text{ 解得 } k = \frac{4}{3}, \text{ 所以直线 } l \text{ 的方程为 } 4x - 3y + 1 = 0.$$

综上,所求直线 l 的方程为 $x = 2$ 或 $4x - 3y + 1 = 0$ 。

解法三

① 当直线 l 的斜率不存在时,根据题意易知直线 l 的方程为 $x = 2$;

② 当直线 l 的斜率存在且为 k 时,由圆 O 的方程知,圆 O 的圆心为 $(1,0)$,半径为 1,圆心到点 $P(2,3)$ 的距离为 $\sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$,由勾股定理得,点 P 到直线与圆 O 切点的距离为 $\sqrt{10-1} = 3$,设切点为

$$(x_0, y_0), \text{ 则可列方程组 } \begin{cases} (x_0-1)^2 + y_0^2 = 1, \\ (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 = 9, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = \frac{1}{5}, \\ y_0 = \frac{3}{5}. \end{cases} \text{ 进而可求得直线 } l \text{ 的方程为 } \frac{y-3}{x-2} =$$

$$\frac{\frac{3}{5}-3}{\frac{1}{5}-2}, \text{ 整理得 } 4x - 3y + 1 = 0.$$

综上,所求直线 l 的方程为 $x = 2$ 或 $4x - 3y + 1 = 0$ 。

(2) 针对本题,结合案例学生出现的错误,教师应该根据该题的教学步骤,在教学过程中,采取相应策略设置问题。下面结合教学过程进行分析:

① 教师与学生一起回忆旧知,提出问题,“过圆外一点能作几条圆的切线”。

②教师结合本题让学生画出该题相关的图像,设置问题引导学生全面考虑直线 l 的位置,如“直线 l 与圆相切有几种情况?”

③教师通过提问引导学生复习直线斜率的存在情况,如“直线斜率存在时,对应图像是什么样子,不存在时如何表示?”

④教师结合本题引导学生根据直线斜率的存在情况运用分类讨论思想解题,可设置问题如“当斜率存在时,直线 l 的方程如何求得?当斜率不存在时,直线 l 的方程是什么?”

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学重点

- ①结合瞬时变化率,了解导数概念的实际背景;
- ②理解导数的概念及其几何意义;
- ③能准确表达某一点处导数的定义;
- ④掌握从定义出发求某一点的导数的计算。

(2) 教学过程

一、新知导入

创设问题情境:经调查发现,在高台跳水中,运动员相对于水面的高度 h (单位:m)与起跳后的时间 t (单位:s)存在的函数关系为 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$,如果用运动员在某段时间内的平均速度 $\bar{v}$ 描述其运动状态,那么在 $1 \leq t \leq 2$ 这段时间里, $\bar{v}$ 的值是多少?

预留时间让学生利用旧知进行求解,之后教师订正: $\bar{v} = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = -8.2(\text{m/s})$ 。

教师明确“平均变化率”的定义(课件展示):

①若将题目中的函数关系用 $y = f(x)$ 表示,那么问题中的变化率即为 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$,称此式为函数 $y = f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率。

②一般习惯用 Δx 表示 $x_2 - x_1$,即 $\Delta x = x_2 - x_1$,可把 Δx 看作相对于 x_1 的一个增量,用 $x_1 + \Delta x$ 代替 x_2 ,类似用 Δy 表示 $f(x_2) - f(x_1)$,则平均变化率可以表示为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

回归课件中的问题背景,教师提出如下问题供学生思考。

教师提问1:运动员在这段时间里是静止的吗?

教师提问2:你认为用平均速度描述运动员的运动状态有什么问题吗?

【设计意图】教师在课堂开始时创设与生活实际相关的问题情境供学生思考讨论,可以激发学生学习新知的兴趣,活跃课堂气氛;物理学科中的平均速度与平均变化率密切相关,教师借此明确平均变化率的概念,一方面可以帮助学生建立起知识之间的联系,另一方面可以为新知的教学做铺垫。

二、新知讲授

教师指出:物理学科中将物体在某一时刻的速度称为瞬时速度。高台跳水中,运动员在不同时刻的速度是不同的,所以平均速度不一定能反映其在某一时刻的瞬时速度。

教师提问:如何求跳水运动员的瞬时速度呢? $t = 2$ 时,跳水运动员的瞬时速度是多少呢?

活动1:学生自主思考,小组合作交流,教师巡视,并做如下引导。

教师引导1:如果用包含变量 Δt 的式子分别表示在区间 $[2 + \Delta t, 2](\Delta t < 0)$ 和 $[2, 2 + \Delta t](\Delta t > 0)$ 上的 $\bar{v}$, $\bar{v}$ 可以表示成什么形式?

教师引导2:对 Δt 分别取 $\pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001, \pm 0.00001$,分别得到对应的 $\bar{v}$ 的值是什么?

教师引导3:当 Δt 趋于0时, $\bar{v}$ 有什么样的变化趋势?

活动2:结合上述引导,教师让学生分别形成区间 $[2 + \Delta t, 2](\Delta t < 0)$ 和 $[2, 2 + \Delta t](\Delta t > 0)$ 上 $\bar{v}$ 取值情况

的对应表格,小组讨论分析,教师巡视指导。

教师课件展示活动探究的表格,师生一起分析并得出结论:

- ① 无论 t 从小于 2 的一边,还是从大于 2 的一边趋近于 2, $\bar{v}$ 均趋近于 -13.1 ;
- ② 当 Δt 趋近于 0 时,平均速度均趋近于一个确定的值;
- ③ 从物理的角度看,时间间隔 $|\Delta t|$ 无限变小时,平均速度 $\bar{v}$ 无限趋近于 $t = 2$ 时的瞬时速度。

教师进一步提出如下问题,供学生思考讨论。

教师提问 1: 运动员在某一时刻 t_0 的瞬时速度如何表示?

教师提问 2: 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率如何表示?

教师引出“瞬时变化率”的定义:

一般地,函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 。

教师进一步引入“导数”的定义:

我们称瞬时变化率为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}。$$

【设计意图】教师通过设问引导学生思考,将知识从“平均变化率”过渡到“瞬时变化率”,之后启发学生进行探究活动,最后带领学生共同分析,得出“平均变化率”和“瞬时变化率”的关系,明确“瞬时变化率”的概念,并借此引入导数的概念。思路清晰的教学过程,符合学生的认知,同时可以充分展现新课标“以学生为主体”的要求,也可以很好地提升学生自主探究和分析、解决问题的能力,培养学生合作交流的意识,丰富学生的数学活动经验。

三、新知巩固

教师课件出示习题供学生巩固新知:

- ① 如果一质点按 $s = 3t^2$ 的规律运动,那么在 $t = 2$ 时该质点的瞬时速度是多少?
- ② 若函数 $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ 在 $x = 1$ 处可导,在运用导数定义求 $f'(1)$ 的过程中,设自变量的增量为 Δx ,则函数的增量 Δy 等于多少?

【设计意图】课堂习题可以帮助学生进一步理解和记忆新知内容,使学生了解新知内容在解题中的应用。此外,新知巩固中的两道练习题,第一题为对瞬时变化率知识内容的巩固,第二题考查学生对于导数定义的理解。这一方面,帮助学生加深对导数定义的理解和掌握,另一方面,帮助教师了解学生对本课的掌握程度。