

2020 年下半年中小学教师资格考试 数学学科知识与教学能力试题(高级中学) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】A. 解析: 利用重要极限, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x}$. 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^{\frac{1}{2}}$ 是无穷小量, $\sin \frac{1}{x}$ 是有界量, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} = 0$. 故本题选 A.

2. 【答案】D. 解析: 将 $x = 1$ 代入方程 $xyz = 1$ 得, $yz = 1$, 这是一个双曲线. 故本题选 D.

3. 【答案】D. 解析: 矩阵 A 的行向量组的极大线性无关组所含向量的个数, 即矩阵 A 的行秩. 对矩阵 A 作初等变换化成阶梯形矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

矩阵的秩等于矩阵的行秩, 因此, 矩阵 A 的行秩为 4. 故本题选 D.

4. 【答案】A. 解析: 由直线方程与平面方程可知, 直线过点 $(-3, -4, 0)$, 且一个方向向量为 $m = (-2, -7, 3)$; 平面的一个法向量为 $n = (4, -2, -2)$. 因为 $m \cdot n = (-2) \times 4 + (-7) \times (-2) + 3 \times (-2) = 0$, 所以 $m \perp n$, 又点 $(-3, -4, 0)$ 不在平面 $4x - 2y - 2z = 3$ 上, 所以直线与平面平行. 故本题选 A.

5. 【答案】B. 解析: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续; 因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$, 所以函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$; 因为当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, 而极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$ 不存在, 所以 $f(x)$ 的导函数在点 $x = 0$ 处不连续; 因为极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(2 \sin \frac{1}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x} \cos \frac{1}{\Delta x} \right)$ 不存在, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不存在二阶导数. 故本题选 B.

6. 【答案】C. 解析: 连接坐标原点 O 与点 M. 由于 PM 与球面相切于点 M, 所以 $\triangle OPM$ 是直角三角形, 于是 $OP = \sqrt{OM^2 + PM^2}$, 又由球面方程知, 球面半径为 1, 所以 $OM = 1$, 再结合题中条件 $PM = 2\sqrt{2}$, $OP = |z|$, 得 $|z| = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$. 故本题选 C.

7. 【答案】B. 解析: 《普通高中数学课程标准(2017 年版)》指出, 高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向, 数学学科核心素养包括: 数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析. 在本题中, 已知角 θ , 求 $\cos 2\theta$, 显然是一个求值问题, 突出考查学生的数学运算素养, 具体表现为运算求解的能力. 故本题选 B.

8. 【答案】A. 解析: 《普通高中数学课程标准(2017 年版)》提到, 在学习平面向量的基础上, 经历由平面向量推广到空间向量的过程, 因而立体几何中的向量方法是平面几何中的向量方法的推广, 因此(1)是“推广”; 几何中的向量方法与几何中的代数方法完全一致, 不同的只是用“向量与向量的运算”来代替“数与数的运算”, 几何中的向量方法可以简单地表述为“【形到向量】 $\rightarrow$ 【向量的运算】 $\rightarrow$ 【向量和数到形】”, 几何中的代数方法可以简单地表述为“【形到数】 $\rightarrow$ 【数的运算】 $\rightarrow$ 【数到形】”, 这两种方法是类比的关系, 因此(2)是“类比”; 平面几何中的向量方法是在数轴与向量概念的基础上, 为解决物理、数学中的问题而发展的运算体

系,因而数轴与向量是平面几何中的向量方法的特殊化,因此(3)是“特殊化”。故本题选A。

二、简答题

9.【参考答案】

(1) 利用基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a > 0, b > 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + e^{x_4}}{4} &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} + \frac{e^{x_3} + e^{x_4}}{2} \right) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{e^{x_1} \cdot e^{x_2}} + \sqrt{e^{x_3} \cdot e^{x_4}}) = \frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}} + e^{\frac{x_3+x_4}{2}}}{2} \\ &\geq \sqrt{e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \cdot e^{\frac{x_3+x_4}{2}}} = e^{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}}. \end{aligned}$$

(2) 利用基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a > 0, b > 0)$,

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} \right) \geq \frac{(\sqrt{y_1 y_2} + \sqrt{y_3 y_4})}{2} \geq \sqrt{\sqrt{y_1 y_2} \cdot \sqrt{y_3 y_4}} = \sqrt[4]{y_1 y_2 y_3 y_4}.$$

10.【参考答案】

(1) 由题知,矩阵 $A_{3 \times 4}$ 的秩等于3,所以齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系的解的个数为 $4 - r(A_{3 \times 4}) = 1$,又 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解,所以向量 $(\eta_1 - \eta_2)$ 是 $Ax = 0$ 的一个非零解,于是 $Ax = 0$ 的通解为 $k(\eta_1 - \eta_2)$, k 为任意常数。

(2) 由(1)知,非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的导出组 $Ax = 0$ 的通解为 $k(\eta_1 - \eta_2)$,结合 η_1 是 $Ax = b$ 的一个特解得, $Ax = b$ 的通解为 $k(\eta_1 - \eta_2) + \eta_1$, k 为任意常数。

11.【参考答案】

$$\begin{aligned} \text{已知泊松分布的概率分布为 } P(X = k) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, 2, \dots), \text{ 则 } E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

12.【参考答案】

① 函数是高中数学的重要内容之一,与函数相关的内容在高中课程中占有很大的比例,如函数的定义和性质,基本初等函数,导数等,函数概念及其反映出的数学思想方法广泛渗透到数学的各个领域,是进一步学习数学的重要基础。

② 函数贯穿于整个高中数学课程,特别是在方程、数列、不等式、随机变量等内容中都突出地体现了函数思想。用函数的思想和观点去研究这些内容,可以帮助我们更好地理解这些知识本身和解决相关问题。例如,用函数的观点看方程,可以把方程的根看成是函数与 x 轴交点的横坐标,即函数的零点;数列是定义域为自然数集或自然数子集的一类特殊的函数,研究数列的性质可以转化为研究这类函数的性质;用函数的观点看,不等式是确定使函数 $y = f(x)$ 在 x 轴上方或下方的 x 的区域,这样我们就可以利用函数图像来求解不等式;随机变量是定义在样本空间上的实值函数,是一类特殊的函数。

综上所述,函数是普通高中数学课程的一条主线,它连接起了高中数学课程的许多内容。

13.【参考答案】

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学,数学运算在数学中具有极其重要的地位。数学运算是解决数学问题的基本手段,是数学活动的基本形式,是得到数学结果的重要手段;数学运算是演绎推理,是计算机解决问题的基础。

高中数学运算素养对学生提出了三个层次水平的要求:水平一,能够在熟悉的数学情境中了解运算对象,提出运算问题;能够了解运算法则及其适用范围,正确进行运算;能够在熟悉的数学情境中,根据问题的特征建立合适的运算思路,解决问题。水平二,能够在关联的情境中确定运算对象,提出运算问题;能够针对运算问题,合理选择运算方法、设计运算程序,解决问题。水平三,在综合情境中,能把问题转化为运算问题,确定

运算对象和运算法则,明确运算方向;能够对运算问题,构造运算程序,解决问题;能够用程序化的思想理解与表达问题,理解程序化与计算机解决问题的联系。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 若 $OP = x_0$, 则光线从点 A 到达点 P 的时间为 $T_1(x_0) = \frac{x_0}{c \sin \theta}$; 光线从点 P 到达点 B 的时间为 $T_2(x_0) = \frac{l - x_0}{c' \sin \theta'}$, 从而光线从点 A 到达点 B 所需的时间为 $T(x_0) = T_1(x_0) + T_2(x_0) = \frac{x_0}{c \sin \theta} + \frac{l - x_0}{c' \sin \theta'}$ 。

(2) 在水面上取一点 P' , 设 $OP' = x (0 < x < l)$, 则光线从点 A 到达点 P' 的时间为 $T_1(x) = \frac{x}{c \frac{\sin \theta}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}} = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c \sin \theta}$; 光线从点 P' 到达点 B 的时间为 $T_2(x) = \frac{l - x}{c' \frac{\sin \theta'}{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}} = \frac{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}{c' \sin \theta'}$, 从而光线沿 $A - P' - B$ 从 A 点到达 B 点所需的时间为 $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c \sin \theta} + \frac{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}{c' \sin \theta'}$ 。

由于 $T(x_0)$ 为光线从点 A 到达点 B 时间的极小值, 所以由费马定理知, $T'(x_0) = \frac{x_0}{c \sqrt{x_0^2 + h_1^2}} - \frac{l - x_0}{c' \sqrt{(l - x_0)^2 + h_2^2}} = 0$ 。注意到, $\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + h_1^2}} = \sin \theta$, $\frac{l - x_0}{\sqrt{(l - x_0)^2 + h_2^2}} = \sin \theta'$, 所以 $T'(x_0) = \frac{\sin \theta}{c} - \frac{\sin \theta'}{c'} = 0$, 即有 $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'}$ 。

四、论述题

15.【参考答案】

数据分析是指针对研究对象获取数据,运用数学方法对数据进行整理、分析和推断,形成关于研究对象的认识的素养。

① 培养学生的数据分析能力,能使其形成严谨的逻辑思维能力。在数据分析过程中,渗透分类思想、归纳思想、类比思想和统计思想等数学思想方法,能促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展。

② 培养学生的数据分析能力,能使其提升数学实际应用能力。数据分析涉及生活各方面,学生在获取有价值信息并进行定量分析时,能增强基于数据表达现实问题的意识,形成通过数据认识事物的思维品质,积累依托数据探索事物本质、关联和规律的活动经验。

③ 培养学生的数据分析能力,使其掌握必要的知识技能,是时代发展的要求。数据分析是研究随机现象的重要数学技术,是大数据时代数学应用的主要方法,也是“互联网+”相关领域的主要数学方法。从学生时代培养起来的数据分析能力对学生今后的学习和发展有重要的意义。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 情境 1 是一个生活中的问题,学生可以通过审题、分析、讨论,将问题归结为比较 pq 与 $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2$ 的大小,进而与本节课学习的基本不等式建立联系。教师通过现实生活中商店打折促销的例子创设情境,贴近生活实际,将教材内容与生活情境有机结合起来,学生能够体会到生活中充满了数学,感受到数学无处不在,从而增强学好数学的信心。

情境 2 是一个物理问题,学生需要先解决这个物理问题,根据初中物理知识力矩平衡原理计算得到 $m =$

$\sqrt{m_1 m_2}$ (其中 m 表示物体的真实质量, m_1 和 m_2 表示题目中的两次称量结果), 将问题归结为比较 $\sqrt{m_1 m_2}$ 与 $\frac{m_1 + m_2}{2}$ 大小问题, 进而与本节课学习的基本不等式建立联系。教师通过数学应用性问题创设情境, 将数学问题深加工, 建立一种物理问题的模型, 让学生经历一个观察、联想、抽象、概括、数学化的过程, 这不仅能激发学生的兴趣, 还能提高学生分析、解决问题的能力。但是, 创设物理问题情境需要学生有扎实的物理知识, 不然很容易影响学生对于问题的探究, 不利于接下来的教学实施。

(2) 实施高中数学情境教学时应注意以下问题。

① 情境创设应有明确的目的性。要求情境创设要从教学内容出发, 充分展现教材重点、难点、疑点和关键点及知识的形成过程和框架结构。

② 情境创设要有启发性。要求创设的情境能够激发学生的想象力, 或者能够引发学生相应的情感体验, 以诱发思维, 促进学生创新意识的发展。

③ 情境创设应合理、适当。教师在创设情境时, 应认真研究情境是否合理, 并不是每节课都适合创设情境, 也不是任何情境都能提高教学效果。

④ 情境创设应以“教为主导, 学为主体”。从问题的提出到解决, 始终以学生为主, 让学生观察、分析、讨论, 教师适时点拨, 学生归纳, 解决问题。

⑤ 情境创设应符合学生的认知, 所提的问题应是深浅适当的、是学生熟悉的。应在最近发展区内, 是学生通过分析、探索能够解决的。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学重点: 渗透二分法思想, 掌握用二分法求方程近似解的一般步骤。

(2) 教学设计

一、复习导入

复习函数零点定义及零点存在定理, 利用函数零点存在定理得到函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 在区间 $(2, 3)$ 内存在一个零点。提问: 如何求出这个零点?

向学生说明, 大多数函数都不能像一元二次函数那样用公式求出零点的精确值, 在实际问题中, 只要求出满足一定精确度的近似值。引导学生思考如果能够将零点所在的范围尽量缩小, 那么在一定精确度要求下, 就可以得到符合要求的零点的近似值, 从而引出本节课的内容——二分法。

【设计意图】通过复习函数零点的定义及零点存在定理为本节课的二分法教学打下理论基础, 通过求函数零点的实际例子用问题进行导入, 能够吸引学生的注意力, 引发认知冲突, 激起学生的学习兴趣, 从而引出本节课的主题——二分法。

二、探索新知

让学生用计算器算出 $f(2.5)$ 的具体值, 并填写在表格中, 引导学生思考并提问: 函数零点应该在区间 $(2, 2.5)$ 还是 $(2.5, 3)$?

预设: 学生通过计算发现 $f(2.5) \approx -0.084 < 0$, 根据零点存在定理, 因为 $f(2.5)f(3) < 0$, 所以零点应该在区间 $(2.5, 3)$ 。

教师讲解: 一般地, 称 $x = \frac{a+b}{2}$ 为区间 (a, b) 的中点, 我们可以通过“取中点”的方法, 快速缩小零点所在的范围。并提问: 零点所在的下一个更小的区间是什么?

让学生用计算器, 通过取中点的方法, 确定零点所在的更小的区间, 不断重复此过程, 并将结果填写在相应的表格。

多媒体展示计算结果的表格, 让学生核对自己的取值点是否正确。

提问: 通过这种方法, 我们可以不断地缩小零点所在的范围, $(2, 3)$, $(2.5, 3)$ $(2.5, 2.75)$, $\dots$, 那么什么时候停止计算呢?

先让学生自主思考,教师引导,并讲解:在重复上述操作后,零点的范围不断缩小,这时,在一定的精确度要求下,我们可以将区间端点作为零点的近似值。例如:当精确度要求为 ε 时,即可得到一个对应的区间 (c, d) ,当满足 $|c - d| < \varepsilon$ 时,区间 (c, d) 内的任何一个值都是满足精确度要求的近似值,一般地,我们取区间端点值为近似值。

教师顺势给出二分法定义:对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 $y = f(x)$,通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二,使区间的两个端点逐步逼近零点,进而得到零点近似值的方法叫作二分法。

让学生合作探究,讨论并总结用二分法求函数零点近似值的一般步骤。

学生讨论过程中,教师巡视并进行指导,5分钟之后请小组代表进行总结发言。对于学生的发言给予鼓励性评价,对于总结不完善的地方请其他学生进一步补充,最后师生共同总结出求解函数近似值的二分法的一般步骤。

【设计意图】新授过程中,通过学生的动手操作,一方面可以提高动手操作能力,熟悉计算器的应用,增加直接活动经验,另一方面通过不断地计算,感受近似值的精确度不断提高,通过提问零点所在的区间,可以引导学生思考并运用零点存在定理对零点所在区间进行判定,加深对知识的理解,提升知识的运用能力,通过小组讨论,提升合作交流能力和语言表达能力及归纳总结能力,通过学生的一系列活动真正做到了还课堂给学生,体现出学生的主体地位,使学生经历知识的发生发展过程,提升学生的数学核心素养。

三、巩固提升

例:对于函数 $f(x) = 2^x + 3x - 7$,利用信息技术完成下列问题。

- ① 画出函数图象;
- ② 列出自变量和函数值的对应表格;
- ③ 利用二分法得出函数零点的近似值(精确度 0.1)。

【设计意图】通过例题不仅可以提升学生对于信息技术的熟练度,还可以从多个维度来观察和探究函数的零点,数形结合,加深对二分法核心思想的理解,巩固用二分法求解函数零点的一般步骤。

(3) 该方案应用建构主义的数学学习理论,引导学生积极参与到探索、发现、讨论、交流的学习活动中去,使课堂教学成为学生亲自参与的生动活泼的数学思想场所。通过问题的引导使学生自然地经历知识的形成过程。使用该方案教学,教师需要根据学生的活动情况进行恰当的提问引导和总结讲解,对教师的综合素质要求较高,教师在课堂授课过程中需要按照新课标的理念,从培养学生的综合素质出发,扮演好课堂活动组织者、引导者、合作者的角色,做到到位而不越位,充分利用多媒体和信息技术,与时俱进地提升学生的数学素养。