2021 年上半年教师资格证考试《高中数学》题参考答案解析

1 正确答案是： C

解析：本题考查的是空间解析：几何空间平面与直线关系的相关知识。由题意可知直线的方向向量为$s=(3,4,1)$，过定点$(2,11,-1)$，平面的法向量$n=(3,-2,-1)$，因为$s\cdot n=0$，定点$(2,11,-1)$不在平面上，故直线与平面的位置关系是平行，C 项正确。故正确答案为 C。

2 正确答案是： A

解析：本题考查的是连续的一致性的相关知识。根据一致连续性定理，如果函数在闭区间$[a,b]$上连续，那么它在该区间上一致连续。因为$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，故$f(x)$在$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$内连续，但不一致连续，而$[0,\dfrac{1}{3}]\cup[\dfrac{3}{2},3]\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，故函数$f(x)$在$[0,\dfrac{1}{3}]\cup[\dfrac{3}{2},3]$一致连续，A 项正确。故正确答案为 A。

3 正确答案是： C

解析：本题考查的是方程的相关知识。由已知可知，$x^4-3x^3+6x-4=0$，两边同除以x^2得$x^2-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{6}{x}-3x=(x^2-\dfrac{4}{x^2})-3(x-\dfrac{2}{x})=(x-\dfrac{2}{x})(x+\dfrac{2}{x}-3)=0$，解得$x=\pm\sqrt{2}$，或$x=1$，$x=2$，因此方程的整数解为$x=1$，$x=2$，共 2 个，C 项正确。故正确答案为 C。

4 正确答案是： C

解析：本题考查的是微分的定义的相关知识。C 项：$\Delta y=f'(x_0)dx$不是微分的增量公式，故错误；C 项正确。A 项：$dy=f'(x_0)dx$是微分的概念，正确，排除；B 项：$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$是微分的有限增量公式，正确，排除；D 项：$\Delta y=dy+o(\Delta x)$表示函数增量与微分的关系，正确，排除；本题为选非题，故正确答案为 C。

5 正确答案是： B

解析：本题考查的是等可能事件求概率的相关知识。抛掷两粒正方体骰子出现的总情况数为$6\times6=36$种，向上的点数和为 5 的情况有$(1,4)$，$(4,1)$，$(2,3)$，$(3,2)$共 4 种情况，故点数和为 5 的概率为$\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$，B 项正确。故正确答案为 B。

6 正确答案是： B

解析：本题考查的是线性方程组的相关知识。必要性，由条件可设$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$，则$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots A\beta_s)$，由题可知，$B(B\neq 0)$，即$B$为非零向量，故$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$中至少有一个非零向量。因此，$AX=0$有非零解，故$r(A)<n$；充分性：若$r(A)<n$，则$AX=0$有非零解，设非零解为$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r$，即$A\beta_i=0(i=1,2,3,...s)$，令$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)(B\neq 0)$，B 项正确。故正确答案为 B。

7 正确答案是： D

解析：本题主要考查课标的相关知识。数学学科核心素养包括：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，D 项正确。本题为选非题，故正确答案为 D。

8 正确答案是： C

解析：本题主要考查课标的相关知识。初等函数有指数函数、对数函数、幂函数、三角函数，所以 ，$g(x)=e^x-Inx^2$，$h(x)=x^\pi+tanx$均为初等函数，$D(x)=\begin{cases}1,x为有理数\\-1,x为无理数\end{cases}$而是狄利克雷函数，为分段函数，不属于初等函数，C 项正确。故正确答案为 C。

9 正确答案是：

根据题意可知，该立体图形为一个旋转椭球面，可以$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$由绕$x$轴旋转一周得到方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=1$ ，所以所求立体图形的体积为$V=2\int_0^a(a^2-c^2)\pi(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4}{3}\pi a(\sqrt{a^2-c^2})^2=\frac{4}{3}\pi a(a^2-c^2)$。

10 正确答案是：

（1）当$x\leq 0$时，$f_x(x)=0$，则X的分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx$，当$x>0$时，$f_x(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$，则$X$的分布函数$F(x)=0+\int_0^x\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=[-e^{-\frac{x}{2}}]|_0^x=1-e^{-\frac{x}{2}}$，综上所述，$X$的分布函数$F(x)=\begin{cases}0,x\leq 0\\1-e^{-\frac{x}{2}},x>0\end{cases}$。

（2）$P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}|_{x=5} = 1 - e^{-\frac{5}{2}}$，则$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = e^{-\frac{5}{2}}$，

所以Y的分布律为$P(Y=k) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{5}{2}}, k = 1 \\ e^{-\frac{5}{2}}, k = -1 \end{cases}$。

11 正确答案是：

（1）在空间解析：几何中，$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$是空间内的一个平面$\text{II}_1$，而该平面的法向量为$(a_{11}, a_{12}, a_{13})$，$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$是空间内的一个平面$\text{II}_2$，而该平面的法向量为$(a_{21}, a_{22}, a_{23})$，$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$是空间内的一个平面$\text{II}_3$，而该平面的法向量为$(a_{31}, a_{32}, a_{33})$，而三个平面的法向量恰好构成了该线性方程组的系数矩阵，构成一个三维空间。

（2）平面 1 与平面 2 相交的充要条件是$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$，即$r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2$，同理可知，三个面相交于一点的充要条件是$r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 3$，即线性方程组系数矩阵的行列式的值不等于 0 的几何意义为 3 个平面相交于一点

12 正确答案是：

（1）必要性：《高中数学课程标准（2017 年版）》的基本理念之一是倡导积极主动。课堂中应该勇于探索的学习方式，学生的数学学习活动不应限于接收、记忆、模仿和练习。数学课堂还应倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习方式。这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程。

（2）意义：①课堂留白符合新课程改革的要求新课程理念积极倡导自主、合作、探究的学习方式，强调把学生看作学习和发展的主体，课堂“留白”策略要恰如其分地契合新课程理念，在课堂上树立学生的主体地位，让教师充当课堂教学的配角，引导学生对所学新知进行解读、分析、消化、拓展，变学生被动接受为主动探索。

②课堂“留白”策略适应学生的心理发展心理学研究表明，课堂上长时间的“满堂灌″不利于学生接受和理解所学知识，适时留出有限的空白时间，反而能舒缓学生的紧张心理，集中学生的注意力，提高思维的质量。

③课堂“留白”策略有利于增强课堂效果，在课堂教学中注重“留白”能极大地发挥学生主观能动性，激发学生积极探索，自主学习数学的兴趣，将以“教”为主变为以“学”为主。应该说在课堂中巧设“留白”，能让师生之间适时地沟通、互动，实现了将课堂中的“教”与“学”融为一体，毫无疑问地将提高课堂效果。因此在教学，上要讲究课堂“留白”，教师必须要给学生留出独立思考的空间，以便激发学生的求知欲，启迪学生的思维

13 正确答案是：

实际背景 1：根据国务院发展研究中心 2000 年发表的《未来 20 年发展前景分析》判断，未来 20 年，我国 GDP（国内生产总值）年平均增长率可望达到7.3%。那么，在 2001-2020 年，各年的 GDP 可望为 2000 年的多少倍？如果把我国 2000 年 GDP 看成是 1 个单位，2001 年为第 1 年，那么：

1 年后（即 2001 年），我国 GDP 可望为 2000 年的$(1+7.3\%)$倍；

2 年后（即 2002 年），我国 GDP 可望为 2000 年的$(1+7.3\%)^2$倍；

3 年后（即 2003 年），我国 GDP 可望为 2000 年的_______倍；

4 年后（即 2004 年），我国 GDP 可望为 2000 年的_______倍；

设x年后我国的 GDP 为 2000 年的y倍，那么y与x间又怎样的关系？

实际背景 2：当生物死亡后，它机体内原有的碳 14 会按确定的规律衰减，大约每经过 5730 年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”，根据此规律，人们获得了生物体内碳 14 含量P与死亡年数t之间的关系：$P=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5730}}$，那么生物死亡了，5730 年、$5730\times 2$年、10000 年后，它体内碳 14 含量分别为多少？

14 正确答案是：

（1）根据题意可知，齐次线性方程组的解空间维数为 2，即基础解系中含有的向量的个数为 2，根据基础解系中含有的向量的个数等于未知数的个数n减去系数矩阵A的秩，即

$2 = n - r(A) = 4 - r(A)$，所以 $r(A) = 2$，所以 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & -5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & a+5 \end{pmatrix}$，所以 $a+5=-2$，解得 $a=-7$。

（2）由（1）知，$a=-7$，所以增广矩阵 $B=(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -9 & -12 & -14 \\ 1 & 3 & -5 & a & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & a+5 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得到，所以基础解系为：令 $x_3=1$，$x_4=0$，则 $x_1=2$，$x_2=1$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$；令 $x_3=0$，$x_4=1$，则 $x_1=-1$，$x_2=2$，得 $\xi_1=:\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；特解 η 为：令 $x_3=0$，$x_4=1$，则 $x_1=-1$，$x_2=0$，所以该非齐次线性方程组的通解为

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in R)$$

15 正确答案是：

运算能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力。培养运算能力有助于学生理解运算的算理，寻求合理简洁的运算途径解决问题。

数学运算能力具体表现为以下几个方面：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果。

例如：进行整式算式$a^2-3+a^4+a^3=?$的运算，首先要观察整式的特点，出现高次幂，首先想到因式分解，运用平方差公式逆过程$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$和立方差公式$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，注意在此公式运用过程中，要掌握公式蕴涵的算理，a 和 b 可以代表任意的代数式。所以$a^2-3+a^4+a^3=a^2-1+a^4-1+a^3-1$

$=(a+1)(a-1)+(a^2+1)(a^2-1)+(a-1)(a^2+a+1)$

$=(a-1)(a+1+a^3+a^2+a+1+a^2+a+1)=(a-1)(3a+3+a^3+2a^2)$，进而得到最后的运算结果

16 正确答案是：

（1）材料中的解答错误之处在于在整个解题过程中，运用了两次均值不等式，对于①式等号成立的条件是$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$，可得$x=y$时等号成立，对于②式等号成立的条件是$x=2y=\frac{1}{2}$，两次 x 和 y 的取值不同。

正确的解法为：因为 x、y 为正实数，且 x+2y=1，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(x+2y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geq 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当$x=\sqrt{2}y=\sqrt{2}-1$时取等号，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为$3+2\sqrt{2}$。

（2）二次函数求最值的一般方法：设某二次函数一般式为$y=ax^2+bx+c$，

①配方法得$y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，所以当$x=-\frac{b}{2a}$时，函数取得最值为$\frac{4ac-b^2}{4a}$。

②公式法：二次函数在对称轴处取得最值，对称轴为当$x=-\frac{b}{2a}$时，函数取得最值为$\frac{4ac-b^2}{4a}$。

③求导法：$y\prime=2ax+b$，令$y\prime=0$，可得$x=-\dfrac{b}{2a}$时函数取得最值$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

17 正确答案是：

（1）导入设计：

教师活动：国际象棋起源于古代印度，相传国王要奖赏国际象棋的发明者。国王问发明者想要什么，发明者回答，请在棋盘的第 1 个格子里放上 1 颗麦粒，第 2 个格子里放上 2 颗麦粒，第 3 个格子里放上 4 颗麦粒，依此类推，每个格子里放的麦粒都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍，直到第 64 个格子，请给我足够的麦粒以实现上述要求。

假定千粒麦子的质量为 40g，按目前世界小麦年度产量约 60 亿吨计，你认为国王能不能满足他的要求？请学生思考计算方法并在练习本上尝试计算。请一位学生在板演列式并解释每一项的意义。

学生活动：每个格子里放的麦粒都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍，所以是首项为 1 公比为 2 的等比数列，共 64 项，麦粒总数为$1+2+2^2+...+2^{63}$。

教师活动：这位同学能够利用已经掌握的知识解决实际问题，非常值得大家学习。那么如何计算这个式子结果呢？记$S=1+2+2^2+...+2^{63}$，式中有 64 项，后项与前项的比为公比 2，若给每一项都乘 2，那么得到的新式子与原式相比较，中间有 62 项是对应相等的，作差是否会得到什么启发呢？请同学们前后四人为一个数学小组，利用 3 分钟的时间交流讨论，根据思路进行计算，并思考国王能否实现诺言。我请小组代表来展示你们的计算过程和答案。

学生活动：$S=1+2+2^2+2^3+...+2^{63}$　　①

$2S=2+2^2+2^3+...+2^{63}+2^{64}$　　②

②-①得　　$2S-S=2^{64}-1$

教师活动：计算过程完整，结果准确，请坐。$2^{64}-1$这个数很大，超过了1.84×10^{19}，假定千粒麦子的质量为 40g，那么麦粒的总质量超过了 7000 亿吨，而目前世界年度小麦产量约 60 亿吨，因此，国王不能实现他的诺言。国王的故事表明他的数学知识有所欠缺，今天我们就对等比数列的前 n 项和的知识进行探索。

同桌交流等比数列的定义，公式与性质，并回忆等差数列求和公式的推导过程。通过多媒体设备呈现棋盘放麦粒的故事，激发学生学习的兴趣，引导学生利用等比数列的性质进行列式，并通过初步渗透“错位相减”的思想方法，达到解决最终问题的目的。

（2）推导过程：

方法一：错位相减法

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1}$ ①

$qS_n = a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n$ ②

①-②有 $(1-q)\ S_n = a_1 - a_1q^n$,

如果$q \neq 1$，则有$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

所以$S_n = \begin{cases} na_1, q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1 \end{cases}$或$\begin{cases} na_1, q=1 \\ \frac{a_1-a_nq}{1-q}, q \neq 1 \end{cases}$

方法二：累加法

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

又因为$a_2 = a_1q$

$a_3 = a_2q$

$a_4 = a_3q$

...

$a_n = a_{n-1}q$

所以$a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1})$

$S_n - a_1 = q(S_n - a_n)$

得$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n$，

如果$q\neq 1$，则有$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

所以$S_n=\begin{cases} na_1, q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q\neq 1\end{cases}$或$S_n=\begin{cases} na_1, q=1 \\ \frac{a_1-a_nq}{1-q}, q\neq 1\end{cases}$

（3）教学过程：

教师活动：我们已经学习了等比数列以及前 n 项和的概念与公式，请同学们看黑板，对于等比数列它的前 n 项和是$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$，若将每一项都用首项与公比相乘的形式表示出来，则S_n可以写成这样的形式$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+...+a_1q^{n-1}$ ①

接下来请小组合作完成第二个等式并利用错位相减法得出结果。

学生活动：通过教师的引导提示，学生得出：

$qS_n=a_1q+a_1q^2+...+a_1q^{n-1}+a_1q^n$ ②

两式相减，有$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n$，

如果$q\neq 1$，则有$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

教师活动：这组代表的答案完全正确。请大家思考当$q=1$时，它的前 n 项和时什么结果。

学生活动：如果$q=1$，则$S_n=na_1$，等比数列的各项相等，相当于常数列，它的前 n 项的和等于它的任一项的 n 倍。

教师活动：考虑问题非常细致。我们一起来归纳总结（师板书）

$S_n=\begin{cases} na_1, q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q\neq 1\end{cases}$或$S_n=\begin{cases} na_1, q=1 \\ \frac{a_1-a_nq}{1-q}, q\neq 1\end{cases}$

环节三：巩固练习

多媒体展示例题，让学生尝试利用等比数列的前 n 项和公式解题，通过板演步骤发现问题，并提醒学生在计算过程中需要注意的细节。

PPT 展示例题：

求等比数列的前 8 项和：$a_1=27,a_9=\frac{1}{243},q<0$

教师活动：求前 8 项和需要什么条件，请一位同学阐述他的思路并板演解题步骤。

学生活动：需要根据与的值求出公比 q，再用公式即可。

由$a_1=27,a_9=\frac{1}{243}$，可得$q^8=\frac{a_9}{a_1}=\frac{1}{243\times 27}$，又由$q<0$，可得$q=-\frac{1}{3}$，

于是当 n＝8 时，$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{\frac{1}{27}(1-\frac{1}{243\times 27})}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{1640}{81}$

教师活动：步骤十分细致完整。另外大家在书写公式时要注意，q^n中的 n 不要写在括号外。

通过板演练习题目，进一步加强学生对公式的理解与应用。

教师活动：请两位同学板演教材第 66 页的练习 1、2、3 题，其他同学在练习本上完成，小组内进行评议。

教师活动：刚才我在巡视的过程中发现大家的解题步骤都比较完整，板演的两位同学也注意到了老师刚才强调的细节，说明大家对本节内容已经掌握了，同学们的学习能力和解决问题的能力都很强，值得表扬。

环节四：课堂小结

教师活动：教师引导学生谈本节课的收获体会。

学生活动：1.等比数列前n项和公式的推导，且在推导过程中，学习了“错位相减法”；2.等比数列前n项和公式的应用，公式涉及到等比数列的基本量中的 4 个量，一般需要知道其中的 3 个，才能求出另外一个量。而公式有两种形式，在应用中应该根据所给的条件，适当选择公式的运用；

3. 两个注意：在使用等比数列求和公式时，注意 的取值，这是首先要考虑的问题，其次要注意n大于 1 的取值。

环节五：布置作业

1. 阅读课本 64 页例题 3 内容并完成思考题；

2. 用其他方法证明等比数列前n项和公式

•