# 2021 年下半年教师资格证考试《高中数学》题参考答案及解析

## 1 解析

本题主要考查矩阵的秩的相关知识。$\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\1&3&5&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-2&-1\\0&-2&-8&-1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-2&-1\\0&0&-4&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，故矩阵的秩为 4，故正确答案为 D。

## 2 解析

本题主要考查向量内积的相关知识。$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$，$-3\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}-6\\-9\\9\end{pmatrix}$，

$\therefore\overrightarrow{a}(-3\overrightarrow{b})=1\times(-6)+(-2)\times(-9)+3\times9=39$，故正确答案为 D。

## 3 解析

本题主要考查极限的计算的相关知识。

$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^2\sin\frac{1}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^2\frac{\sin\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{2n^2}}\times\frac{1}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^2\times\frac{1}{2n^2}=2$，故正确答案为 C。

## 4 解析

本题主要考查导数的应用的相关知识。设切点为$(x_0,y_0)$根据已知条件可知，$x_0+y_0-3=0$，

$(\int_0^x e^{t^2}dt)=e^{x^2}$，曲线的斜率$k=e^{x0^2}=1$，解得$x_0=0$，则$y_0=0$，则切线方程为$y=x$，B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B。

## 5 解析

本题主要考查旋转曲面的相关知识。$\begin{cases}x^2+\frac{z^2}{9}=1\\y=0\end{cases}$ 绕$z$轴旋转一周，则$z$不变，$x$变成$\pm\sqrt{y^2+x^2}$，即$x^2+y^2+\frac{z^2}{9}=1$，A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A。

6 解析

本题主要考查向量组的相关知识。根据向量组线性无关的定义：给定向量组$A$：$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$，…，$\overrightarrow{\alpha_m}$，若当且仅当$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时，使$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}+...+k_m\overrightarrow{\alpha_m}=0$成立，则称向量组$A$线性无关。

根据已知条件可知，向量$\overrightarrow{\alpha_1}$与$A(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2})$线性无关，则当且仅当$k_1=k_2=0$时，有$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2A(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2})=0$，即$k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2A\overrightarrow{\alpha_1}+k_2A\overrightarrow{\alpha_2}=0$，即$(k_1+k_2\lambda_1)\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\lambda_2\overrightarrow{\alpha_2}=0$，因为$\overrightarrow{\alpha_1}$，$\overrightarrow{\alpha_2}$线性无关，所以$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1=0\\k_2\lambda_2=0\end{cases}$，当$k_2=0$，$\lambda_2\neq0$时，符合题意；当$\lambda_2=0$，则$k_2$不一定为 0，不符合题意，B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B。

7 解析

本题主要考查课标的相关知识。首先该图形是中心对称图形，所以涉及旋转变换，其次该图形中心部分属于勾股弦图，在图标的右下方用木棒表示数字进位制，C 项与题干相符，当选。

A、B、D 三项：与题干不符，排除。

本题为选非题，故正确答案为 C。

8 解析

本题主要考查课标的相关知识。指数函数、对数函数、反三角函数，均不属于周期函数，三角函数是周期函数，B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B。

9 正确答案是：

（1）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3k - 1 - (2k - 2) + 2 \times (-4)$$

$= k - 7 = 0$，解得$k = 7$；

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以设$\overrightarrow{\alpha_3} = k_1\overrightarrow{\alpha_1} + k_2\overrightarrow{\alpha_2}$，

即$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 2 \\ k_2 = -1 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = -1 \end{cases}$，

所以$\overrightarrow{\alpha_3} = 4\overrightarrow{\alpha_1} - \overrightarrow{\alpha_2}$。

10 正确答案是：

根据已知条件可知围成的图形面积为

$$\int_0^2 (x - arctanx)dx = \int_0^2 xdx - \int_0^2 arctanxdx$$

$$= \frac{1}{2}x^2|_0^2 - [x \cdot arctanx|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{x^2+1} d\frac{1}{2}(x^2+1)] = 2 - [2arctan2 - \frac{1}{2}ln(x^2+1)|_0^2]$$

$= 2 - 2arctan2 + \frac{In5}{2}$。

11 正确答案是：

（1）获胜一次的概率为$P = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_3^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$。

（2）设乙成功的概率为$P_1$，则$P_1 = C_3^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{8}$，设平局的概率为$P_2$，则$P_2 = C_3^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^1 = \frac{3}{8}$，故甲击中 2 次且获胜的概率为$1 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$。

12 正确答案是：

“四基”指的是数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。

①基础知识一般是指数学课程中所涉及的基本概念、基本性质、基本法则、基本公式等。

②基本技能包括基本的运算、测量、绘图等技能。在基本技能的教学中，不仅要使学生掌握技能操作的程序和步骤，还要使学生理解程序和步骤的道理。

③基本思想主要是指数学抽象的思想、数学推理的思想和数学模型的思想。

④基本活动经验的积累要和过程性目标建立联系。数学活动经验的积累是提高学生数学素养的重要标志，是学生不断经历、体验各种数学活动过程的结果，如思考的经验、小组合作的经验、活动组织的经验，数据分析统计的经验等都属于活动经验。

四能是指：发现问题的能力、提出问题的能力、分析问题的能力和解决问题的能力。

13 正确答案是：

（1）简单随机抽样定义：一般地，设一个总体含有$N$个个体，从中逐个不放回地抽取$n(n \leq N)$个个体作为样本，如果每次抽取时总体内的各个个体被抽到的机会都相等，就把这种抽样方法叫做简单随机抽样。

特点：每个样本单位被抽中的可能性相同（概率相等），样本的每个单位完全独立，彼此间无一定的关联性和排斥性。简单随机抽样是其它各种抽样形式的基础。通常只是当总体单位之间差异程度较小和数目较少时，才采用这种方法。简言之，其特点是：①总体个数有限；②逐个抽取；③不放回抽样；④等可能抽样。

分层抽样定义：当总体由差异明显的几部分组成时，为了使抽取的样本更好的反应总体情况，我们经常将总体中各个个体按某种特征分成若干个互不重叠的几部分，每一部分叫做层，在各层中按层在总体中所占比例进行简单随机抽样。

适用特征：①总体由差异明显的几部分组成；②分成的各层互不重叠；③各层抽取的比例等于样本在总体中的比例$\frac{n}{N}$。

14 正确答案是：

因为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，假设函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值为$M$，最小值为$N$，因为$a<c<d<b$，则$N\le f(c)\le M$，$N\le f(d)\le M$，所以$2N\le f(c)+f(d)\le 2M$，即$2N\le k\le 2M$，由介值定理，在$[a,b]$中至少存在一点$\xi$，使得$N\le f(\xi)\le M$，所以$2f(\xi)=k$。

15 正确答案是：

（1）高中阶段函数的概念：设$A$、$B$是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系$f$，使对于集合$A$中的任意一个数$x$，在集合$B$中都有唯一确定的数$f(x)$和它对应，那么就称$f:A\to B$为从集合$A$到集合$B$的一个函数。记作：$y=f(x)$，$x\in A$。其中，$x$叫做自变量，$x$的取值范围$A$叫做函数的定义域；与$x$的值相对应的$y$值叫做函数值，函数值的集合$\{f(x)|x\in A\}$叫做函数的值域。

函数：在一个变化的过程中如果由两个量$x$和$y$，并且对于$x$的每一个确定的值，$y$都有唯一确定的值与其对应，那么就说$x$是自变量，$y$是$x$的函数。如果当$x=a$时$y=b$，那么$b$叫做当自变量的值为$a$时的函数值。

（2）相同之处：都是研究两个量之间的关系

不同之处：初中学习的函数主要是研究图像，描述的是变量的变化趋势；而高中的函数概念是研究集合与集合间的一种映射关系。

16 正确答案是：

（1）在第二步到第三步推导过程中，由于忽略$\alpha$的取值范围，导致算出的$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$未舍去；在第五步计算过程中，由于忽略$\alpha$的取值范围，导致算出的$\sin\alpha$均为正值错误；在第六步计算过程中，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$公式运用错误。

（2）正确的解法为：

$\begin{cases} \sin\alpha - \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$，消去$\sin\alpha$,

可得$5\cos^2\alpha - \sqrt{5}\cos\alpha - 2 = 0$

解得：$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$或$\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

因为$\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$，

所以$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

因为$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

所以$\sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$（舍正），

所以$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$。

（3）首先这名学生在运算方面有一定的计算能力，但三角函数有些公式的掌握不够准确，是结果错误的一个原因；其次整个计算过程中，逻辑推理能力欠缺，计算三角函数数值时，都应该在规定的角的范围内求解，而不是仅仅在最后一步才考虑角的范围，最后导致计算结果错误。

17 正确答案是：

（1）推导过程：

即垂足$Q$点坐标为$\left(\dfrac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2+B^2}, \dfrac{-ABx_0 - A^2y_0 - BC}{A^2+B^2}\right)$,

根据两点间的距离公式可知：

$|PQ|==\sqrt{(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0)\ ^2+(\frac{-ABx_0-A^2y_0-BC}{A^2+B^2}-y_0)\ ^2}=$

$\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，因此，点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，可以验证$A=0$或$B=0$均成立。

（2）教学目标：

学生知道点到直线的距离公式，理解并掌握点到直线的距离公式，能运用公式进行相关计算。通过自主探究和小组讨论的学习过程，提高计算能力，数形结合能力。通过本节课的学习，学生增强自信心，提高学习兴趣，增强合作意识。

（3）教学过程：

1.课堂导入

教师活动:教师通过多媒体展示一系列问题,两点间的距离公式是什么？直线的一般方程是什么？引导学生认真观察并思考。

学生活动：根据老师的提问进行思考或讨论，回顾两点间距离公式和直线方程。

教师活动：针对学生的回答给予评价，并提问如果给定一点的坐标和直线方程，如何求点到直线的距离？引入新课——点到直线距离公式。

设计意图：通过学生熟悉的两点间的距离来引入新知，能引起学生对前后知识之间联系的思考，有助于同学们更好的感受知识的形成过程。

2.公式推导

教师活动：教师给出已知问题：如图 2：已知点$P(x_0,y_0)$，直线$l$:$Ax+By+C=0$，若求$P$到$l$的直线距离，首先大家能够想到的方法有什么？给予学生一定时间进行小组讨论，讨论过程中教师进行巡视指导，讨论结束后，找学生代表进行回答，针对回答结果教师给予评价。

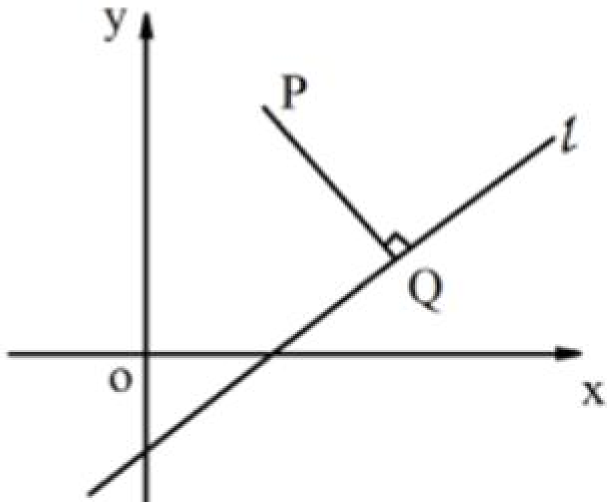


图2

学生活动：通过知识回顾想到：可以先求过点$P$到直线 l 的交点$Q$，将问题转换成求两点间线段$PQ$的距离。

教师活动：肯定同学们的结论，并提问：那么这个点$Q$如何求出来呢？需要求什么？组织同学们思考这个过程并巡视指导完成$PQ$的求解。

学生活动：学生通过讨论，得出过$P$做$PQ\perp l$，垂足为$Q$，根据$PQ$直线与$l$垂直，可以得出$PQ$直线方程，即设$A\neq 0$，$B\neq 0$，由$PQ\perp l$，则$PQ$斜率为$\frac{B}{A}$，$PQ$方程为$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$，即$Bx-Ay=Bx_0-Ay_0$，

根据两直线交于点$Q$，方程组$\begin{cases}Ax+By+C=0\\Bx-Ay=Bx_0-Ay_0\end{cases}$从而求出$Q$点坐标，即垂足$Q$点坐标为$(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}，\frac{-ABx_0-A^2y_0-BC}{A^2+B^2})$，

再根据两点间的距离公式可知：

$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2+B^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{-ABx_0 - A^2y_0 - BC}{A^2+B^2} - y_0\right)^2} = \sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，因此，点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

教师活动：再次提问如果$A=0$或$B=0$上述距离公式是否也成立呢？引导学生进行自主思考并抢答。针对回答结果进行相应评价。

学生活动：学生得出可以验证$A=0$或$B=0$均能使公式成立。

设计意图：通过设置问题，层层提问，利用提问法和引导法引导学生进行问题的思考并进一步的讨论，体现了教师的主导性作用；学生采用小组讨论和自主探究等多种学习方法，进行问题的探究，提高学生之间的合作交流意识、语言表达和信息共享意识，为提高解决问题的能力奠定基础，这也是体现学生主体性作用的一种重要学习方法。

3.巩固提高

教师活动：教师通过多媒体展示例题，让学生尝试利用点到直线的距离公式解题，通过板演步骤发现问题，并提醒学生在计算过程中需要注意的细节。针对学生的作答结果订正并评价。

学生活动：按照要求进行相关练习。

设计意图：通过设置练习题，不仅能使学生的新知得到及时巩固，也使学生思维能力得到有效提高，能更好的将知识学以致用，找学生代表去黑板练习，这也充分体现学生的主体性地位。最后针对练习结果，进行统一订正，并对他们的表现作出及时的评价，亦体现课程评价在课堂中的合理应用。

4.课堂小结

教师活动：教师引导学生谈本节课的收获体会。

学生活动：学生总结点到直线的距离公式及该公式的推导过程。体会数学逻辑推理的思路和方法。

设计意图：在小结环节采用先让学生自评，接着让学生互评，最后教师表扬全班学生，不仅是为了检验学生对本节课重点内容的清楚认识，更能进一步增强学生的自信心和荣誉感，使他们更加热爱数学。