2022年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题（高级中学）参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C。解析：利用洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$。故本题选C。

2.【答案】C。解析：函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$在$x^2-3x+2=0$处无定义，即在$x=1$和$x=2$处无定义，又因为初等函数在其定义区间内是连续的，所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$的间断点有2个。故本题选C。

3.【答案】D。解析：对$y=2x+e^x$求导得$y'=2+e^x$，所以$y'|_{x=0}=2+1=3$，因此曲线$y=2x+e^x$在点(0，1)处的切线方程是$y-1=3(x-0)$，即$y=3x+1$。故本题选D。

4.【答案】C。 解析：对题中矩阵作初等行变换，化成阶梯形矩阵：$\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\1&0&3&-1\\-2&0&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，因为阶梯形矩阵有3个非零行，所以矩阵$\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\1&0&3&-1\\-2&0&-2&2\end{bmatrix}$的秩是3。故本题选C。

5.【答案】B。解析：设非零向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的夹角为$\theta$。若$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$，则$\cos\theta=0$，又$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，可得$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$；若$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$，则$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\cos\theta=0$，于是$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$。因此，“$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$”是“$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$”的充要条件。故本题选B。

6.【答案】B。解析：将一枚质地均匀的硬币抛掷4次，其中有2次正面朝上的概率是$C_4^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$。故本题选B。

7.【答案】A。解析：吴文俊是首届国家最高科技奖的得主，他的研究工作涉及数学的诸多领域，其主要成就表现在拓扑学和数学机械化两个领域，“文华逾九章，拓扑公式彪史册；俊杰胜十书，机器证明誉寰球”是对吴文俊先生毕生成就的高度概括。故本题选A。

8.【答案】B。解析：《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》中明确提出的数学学科核心素养包括：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。故本题选B。

二、简答题

9.【参考答案】

方程$e^x+xy-e^y=1-e$两边对x求导，可得$e^x+y+xy'-e^yy'=0$，

整理得$y'=\dfrac{e^x+y}{e^y-x}$，所以$y'(0)=\dfrac{e^0+y(0)}{e^{y(0)}-0}=\dfrac{1+y(0)}{e^{y(0)}}$。

将$x=0$代入方程$e^x+xy-e^y=1-e$，可得$y(0)=1$，

因此，$y'(0)=\dfrac{1+y(0)}{e^{y(0)}}=\dfrac{1+1}{e}=\dfrac{2}{e}$。

10.【参考答案】

设垂直且平分线段 M_1M_2 的平面为 π，则平面 π 过线段 M_1M_2 的中点 $M(2,-1,1)$，且向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,2,-4)$ 是平面 π 的一个法向量，于是平面 π 的方程为 $2(x-2)+2[y-(-1)]-4(z-1)=0$，即 $x+y-2z+1=0$，故垂直且平分线段 M_1M_2 的平面方程为 $x+y-2z+1=0$。

11.【参考答案】

"抽到的产品是甲工厂生产的"记为事件 A，"抽到的产品是乙工厂生产的"记为事件 B，"抽到的产品为次品"记为事件 C。

(1) 由全概率公式得，任意抽取的一件产品是次品的概率为

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=40\%\times2\%+60\%\times1\%=0.014。$$

(2) 若抽取的这件产品是次品，则该产品出自甲工厂的概率为

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C|A)}{P(C)}=\frac{0.008}{0.014}=\frac{4}{7}。$$

12.【参考答案】

一般地，分类应保证"不重不漏"，因此在分类时应遵循以下原则：

(1) 同一性原则。分类应按同一标准进行，即每次分类不能同时使用几个不同的分类依据。如将三角形分为锐角三角形、钝角三角形和等腰直角三角形，分类标准不统一，这显然是错误的。

(2) 互斥性原则。分类后的每个情况应当互不相容，也就是分类后不能有一些事物既属于这个情况，又属于另一个情况。如将实数分为非正数和非负数是错误的，因为非正数和非负数都包含 0。

(3) 层次性原则。分类有一次分类和多次分类之分，一次分类是对被讨论对象只分类一次；多次分类是把分类后所得的情况再进行分类，直至满足需要为止，分层不能越级。如实数分为有理数和无理数，有理数又分为整数和分数。

学习分类的意义：

(1) 分类需要对客观事物进行分析、比较、发现并抽象归纳出事物的一般特点或本质属性，这就为发展数学抽象的核心素养铺平了道路。

(2) 不同类别的分类为深入认识指明了可能的途径，从而可以由特殊到一般逐渐深入地研究对象。

(3) 由于分类活动都是从辨别开始，再抽象为具体概念和定义性概念，最后形成规则和高级规则，即为达到高级思维奠定基础。

(4) 运用分类思想能够帮助学生有条理、有顺序、不重复、不遗漏地归纳整理知识，形成完善合理的知识网络图。

(5) 学会分类是发展组织策略的重要前提，这是由于组织策略是根据知识经验之间的内在关系，对学习材料进行系统、有序的分类，整理与概括，使之结构合理化。

13.【参考答案】

概率和频率的区别与联系：

(1) 概率和频率都是统计系统各元件发生的可能性大小。

(2) 频率是概率的近似值，随着试验次数的增加，频率会越来越接近概率；概率是系统固有的准确值，是客观存在的，与试验的次数无关。

(3) 在实际问题中，通常频率值容易得到，因此常用频率作为概率的估计值。

比如，投掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上是一个随机事件，如果仅抛掷 10 次，正面朝上的次数可能是 1 ~ 10 次，结果不能确定，如果做成千上万次试验，出现正面的频率会逐渐稳定在 0.5；从概率的角度看，投掷硬币 1 次出现正面朝上的概率是 0.5，与试验次数无关。

三、解答题

14.【参考答案】

将线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+2x_2+3x_3=3\end{cases}$的增广矩阵化成行最简阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&2\end{bmatrix},$$

由此可知，非齐次线性方程组的一个特解为$\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$，同时，非齐次线性方程组对应的导出组的一个基础解系为$\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$。因此，非齐次线性方程组的通解为$k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$，其中$k$为任意实数。

四、论述题

15.【参考答案】

（1）将“几何与代数”整体设计为一个主题，主要有以下两方面原因。

① 高中课程的需求。高中数学中，几何与代数是联系密切的整体，特别是向量作为沟通几何与代数的桥梁，很好地将几何直观与代数运算融合在一起，即将形与数结合在一起。高中课程的这一特点决定了将“几何与代数”整体设计为一个主题有利于课程内容的连贯和完整。

② 学生学习的需求。代数用法则和公式能够有效地对抽象的知识进行推理，但缺乏直观；几何源自于图形的发展，比较直观易懂，但却难以得到深化。因此，只有将两者结合起来，几何为抽象的代数提供原始的模型，代数为几何提供有效的方法，才有助于学生更好地理解数学。

（2）复数本质上是有序数对，因此复数集$\mathbf{C}$与复平面内的所有点组成的集合是一一对应的，与复平面内以原点为起点的向量组成的集合是一一对应的，这种对应关系为用向量方法解决复数问题或用复数方法解决向量问题创造了条件，如复数的加减运算可以用向量的加减运算的平行四边形法则或三角形法则来理解。

五、案例分析题

16.【参考答案】

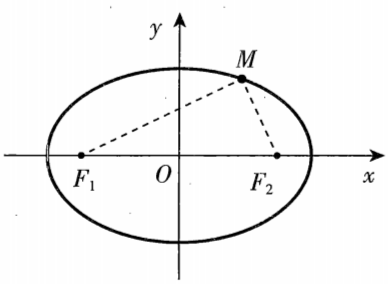
（1）这名学生的求解过程主要有下面两处错误：①没有考虑函数$y=\ln(x+1)+\ln(x-3)$的定义域，即要在定义域$(3,+\infty)$内求函数的单调性；②该生在求二次函数$t=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$的单调性时，错误地认为函数值大于零的区间为单调递增区间。

（2）函数$y=\ln(x+1)+\ln(x-3)=\ln(x^2-2x-3)$，由$\begin{cases}x+1>0,\\ x-3>0\end{cases}$可知，函数的定义域为$(3,+\infty)$，令$t=x^2-2x-3(x>3)$，由于$y=\ln t$是增函数，根据复合函数的“同增异减”法则，只需求二次函数$t=x^2-2x-3(x>3)$的单调递增区间，易得该二次函数的单调递增区间为$(3,+\infty)$，故函数$y=\ln(x+1)+\ln(x-3)$的单调递增区间为$(3,+\infty)$。

六、教学设计题

17.【参考答案】

（1）以经过椭圆两焦点F_1,F_2的直线为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系xOy，如图所示。



设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，那么焦点 F_1,F_2 的坐标分别为 $(-c,0),(c,0)$。由于绳长为 $2a$，根据椭圆的定义，点 M 与焦点 F_1,F_2 的距离的和等于 $2a$。

由椭圆的定义可知，椭圆可看作点集

$$P=\{M\,|\,|MF_1|+|MF_2|=2a\}。$$

因为

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

化简可得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

等式两边同除以 $a^2(a^2-c^2)$ 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1,$$

由椭圆的定义可知，$2a>2c>0$，即 $a>c$，所以 $a^2-c^2>0$，假设 $a^2-c^2=b^2$，那么椭圆方程可简化为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

（2）教学目标：

①通过绘制椭圆的过程认识椭圆的几何特征，给出椭圆的定义，推导出椭圆的标准方程，并能解决简单的问题；

②通过建立适当的坐标系，得到椭圆的标准方程，从中体会建立曲线的方程的方法，发展数学抽象、数学运算素养。

教学重点：椭圆的定义及椭圆的标准方程。

教学过程：

一、创设情境，引入新知

教师用多媒体出示问题：取一条定长的细绳，把细绳的两端拉开一段距离，分别固定在图板的两点处，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，看看你能画出什么曲线？

【设计意图】通过创设情境，让学生直观形象地感受新知内容，激发学生的学习兴趣。

二、动手试验，探究新知

学生亲自动手，根据要求画出曲线。教师提出改变定长和定点，观察所画的曲线有什么共同的特点，并要求学生用数学语言刻画这些曲线上的点满足的条件。

【设计意图】由实际操作，强化学生对椭圆的几何特征的认识，并引导学生由此抽象出椭圆的定义。

教师提问：你能用精确的数学语言刻画椭圆吗？

学生尝试用精确的数学语言给出椭圆的定义。如果学生给出的定义不完善，教师通过追问，帮助学生完善，最后师生共同总结出椭圆的定义：平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫作椭圆。这两个定点称为椭圆的两个焦点，两焦点间的距离叫作椭圆的焦距。

教师强调：当常数等于两定点间的距离时，点的轨迹是线段；当常数小于两定点间的距离时，点的轨迹不存在。

【设计意图】通过强化椭圆概念的抽象与建立过程，提高学生思维的严谨性与语言表达能力。

问题：了解椭圆的概念之后，请尝试建立椭圆的方程。

教师带领学生复习用坐标法求动点轨迹方程的一般步骤，类比圆的方程的推导过程，启发学生独立思考动手推导椭圆的标准方程。教师提示学生如何建立合适的直角坐标系，并在学生根据定义得到等式后，还需要对化简过程进行适当的指导。

教师订正答案，讲解并板书推导过程。得到焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$；焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$。

【设计意图】引导学生根据对称性建立合适的坐标系，以椭圆标准方程的推导为载体，使学生掌握推导圆锥曲线方程的一般思路与方法。

三、巩固新知，提升练习

教师设置练习题帮助学生巩固新学知识，学生独立完成，教师订正答案。

【设计意图】自我练习可以进一步地加深学生对所学知识的理解和掌握。

四、归纳小结，布置作业

教师带领学生对本节课的内容进行回顾和反思，构建知识网络，领悟思想方法。布置作业。

【设计意图】对新知内容进一步整合总结，可以帮助学生进一步理解和记忆新知。通过课后练习，让学生进一步地思考和运用新知。