2023年上半年教师资格证考试《高中数学》题

1.本题主要考查导数的运算的相关知识。因为 g(x)在$[0,+\infty)$可导，故 f(x)可导，则

$f'(x)=ax^{a-1}g(x)+(x^a-1)g'(x)$，故$f'(1)=a\times1\times g(1)+(1-1)g'(x)=ag(1)=a$。C 项正确。

A、B、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 C

2.本题主要考查函数的间断点的相关知识。因为 x=0 是函数的无定义点，故函数在该点处不连续，且

$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}$不存在，故该点为第二类间断点。D 项正确。

A、B、C 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 D

3.本题主要考查内积的计算的相关知识。因为(α,β)是内积，故$(\alpha,\beta)=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot\cos<\alpha,\beta>\le|\alpha|\cdot|\beta|$。B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B

4.本题主要考查投影变换的相关知识。因为 $T=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，故 A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A

5.本题主要考查直线方程的相关知识。因为直线过点$M_1(3,-2,1),M_2(-1,0,2)$,直线的方向向量为

$\overrightarrow{M_2M_1}=(4,-2,-1)$，根据对称式可知，直线的方程为$\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$。C 项正确。

A、B、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 C

6.本题主要考查随机事件的概率的相关知识。目标不被命中的概率为$(1-0.4)\times(1-0.5)=0.6\times0.5=0.3$，则目标被命中的概率是$1-0.3=0.7$。B 项正确。

A、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 B

7.本题主要考查课标的相关知识。高中数学课程分为必修课程、选择性必修课程和选修课程。高中数学课程内容突出函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动四条主线，它们贯穿必修、选择性必修和选修课程。A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A

8.本题主要考查指数函数的相关知识。

A 项：在一定条件下，若某种群的起始数量为N_0，若每年的增长率都保持不变，设第二年的种群数量是第一年的λ倍，那么 t 年后该种群的数量为$N_t=N_0\lambda^t$。与题干不符，排除。

B 项：设 t=0 时，放射性物质的数目为N_0，则 t 时间之后，$N=N_0e^{-\lambda t}$。与题干不符，排除。

C 项：若在期初存入本金为 A，利率为 i，存 n 期后的本金与利息之和为$F=A(1+i)^n$。与题干不符，排除。

D 项：自由落体运动中的速度为 v=gt，位移是$s=\frac{1}{2}gt^2$，不涉及到指数函数增长。D 项表述错误，为正确选项。

本题为选非题，故正确答案为 D

9.正确答案是：

若 h<0，则$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z\\z=h\end{cases}$，在平面内即为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=h$，$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=-h$，表示焦点在 y 轴上的双曲线；

若 h>0，则$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z\\z=h\end{cases}$，在平面内即为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=h$，表示焦点在 x 轴上的双曲线；

若 h=0，则$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z\\z=h\end{cases}$，在平面内即为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0$，则$y=\pm\frac{3}{2}x$表示两条过原点的直线

10. 暂缺

11.

正确答案是：

（1）根据题意可知，$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{16},-2\le x\le 2,-2\le y\le 2\\0\end{cases}$,则 X 的边缘分布密度为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-2}^{2}\frac{1}{16}dy=\frac{1}{16}y|_{-2}^{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$，则

①当 x<-2 时，$P(X\le x)=0$；

②当 x>2 时，$P(X\le x)=1$；

③当 $-2\le x\le -2$ 时，$P(X\le x)=\int_{-2}^{x}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}t|_{-2}^{x}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x+2)$。

故 X 概率分布为 $F_X(x)=\begin{cases}0,x<-2\\\frac{1}{4}(x+2),-2\le x\le 2\\1,x>2\end{cases}$。

（2）由（1）可知，$F_X(x)=\begin{cases}0,x<-2\\\frac{1}{4}(x+2),-2\le x\le 2\\1,x>2\end{cases}$，且 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4},-2\le x\le 2\\0,\text{其他}\end{cases}$，

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4},-2\le y\le 2\\0,\text{其他}\end{cases}$，则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X、Y 独立同分布，则

$F_Y(y)=\begin{cases}0,y<-2\\\frac{1}{4}(y+2),-2\le y\le 2\\1,y>2\end{cases}$，则：

①z<-2 时，$F_Z(z)=0$；

②z>2 时，$F_Z(z)=1$；

③ $-2\le x\le 2$ 时，

$F_Z(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}=1-P\{x>z,y>z\}=$

$1-P\{x>z\}P\{y>z\}=1-[1-p\{x\le z\}][1-p\{y\le z\}]=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=$

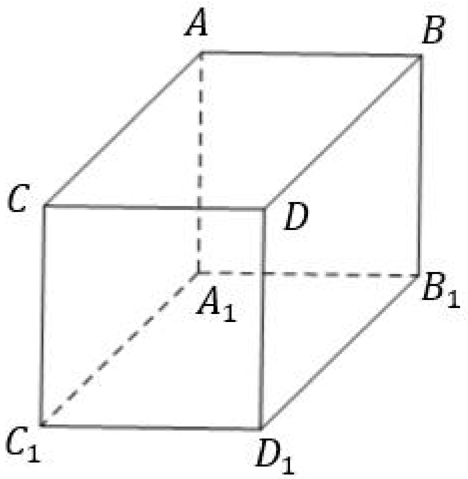
$1-[1-\frac{1}{4}(z+2)]^2=-\frac{1}{16}z^2+\frac{1}{4}z+\frac{3}{4}$；

则 $F_Z(z)=\begin{cases}0, z<-2\\ -\frac{1}{16}z^2+\frac{1}{4}z+\frac{3}{4}, -2\le y\le 2\\ 1, z>2\end{cases}$

12.

正确答案是：

①帮助认识复杂、抽象的几何图形。在学习空间中直线、平面以及二者关系的过程中，借助长方体为载体，可以将抽象的空间图形转化为更直观、形象的长方体中的棱长所在的直线、各个面，所在的平面，帮助建立空间想象能力，提高逻辑推理能力。例如，如图所示：



长方体中的任意两条棱长所在的直线的位置关系为直线和直线平行或直线和直线垂直，如 l_{CD}//$l_{C_1D_1}$， $l_{CD}\perp l_{BD}$ 等；

容易得出直线和平面的位置关系为，长方体中的棱所在的直线和其他平面的关系可能为平行、垂直或者在平面内，如直线 l_{CD}//面 ABB_1A_1，直线 $l_{CD}\perp ACC_1A_1$，直线 l_{CD} 在面 ABCD 内等；

容易得出长方体中的平面和平面的关系为平行或相交（包括垂直），如：面 ABB_1A_1//面 CDD_1C_1；面 ABB_1A_1 ⊥面 ACC_1A_1 等；

②辅助计算数量关系。

借助向量法研究空间中直线和直线、直线和平面以及平面和平面位置关系时，可以利用长方体中的一顶点为空间直角坐标系的原点，以过该顶点所在的三条棱长为直线分别为 x 轴、y 轴和 z 轴，写出相应点的坐标后进行求解

13.

正确答案是：

①函数的定义域，函数的单调性要结合函数的区间说明才有意义；

②求函数的导数。在求解函数发 f(x)的单调性的过程中，可以借助函数 $f'(x)>0$ 得出在该区间上单调递增；借助 $f'(x)<0$ 得出在该区间上单调递减。

③求函数的极值。利用函数在区间上的单调性质画出草图，结合极值的定义判断谁是函数的极大值、谁是函数的极小值。

④求最值问题。根据在给定区间上函数单调性的判断，得出函数值最大的即为最大值，函数值最小的即为最小值。

⑤求函数零点的个数问题。利用函数的单调性判断出极值和最值之后，根据函数图象与 x 轴的相对位置，即函数与 x 轴的交点得出函数的零点个数

14.
正确答案是：

①任取 $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$，易知函数 f(x)在闭区间上[a,b]上连续，由一致连续性定理，则 f(x)在[a,b]上一致连续；

②对于区间 $[b,+\infty)$，对于 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$，对于 $\forall x_1,x_2\in[b,+\infty]$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$|f(x_1)-f(x_2)|=|(x_1+\sin x_1)-(x_2+\sin x_2)|=|(x_1-x_2)+(\sin x_1-\sin x_2)|\leq|x_1-x_2|$

$+|\sin x_1-\sin x_2|\leq 2|x_1-x_2|<\varepsilon$，即 f(x)在区间 $[b,+\infty)$ 上一致连续；

③同理，f(x)区间 $(-\infty,a]$ 上一致连续。

综上所述，f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续

15.
正确答案是：

写出对数的概念和 3 条运算性质，并结合对数的运算性质谈谈你对数加法运算与乘法运算互相转化的认识。

对数的概念：一般地，如果 $a^x=N(a>0,\text{且}a\neq1)$，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=log_aN$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数。

对数的运算性质：

如果 a>0，且 $a\neq1$，$M>0,N>0$，那么

① $log_a(MN)=log_aM+log_aN$；

② $log_a\frac{M}{N}=log_aM-log_aN$；

③ $log_aM^n=nlog_aM(n\in R)$。

首先，对数乘法运算和加法运算之间是借助指数运算得到的，例如：设 $M=a^m$， $N=a^n$，因为 $a^ma^n=a^{m+n}$，所以 $MN=a^{m+n}$，根据对数与指数之间的关系可得 $log_aM=m$， $log_aN=n$， $log_a(MN)=m+n$，即 $log_a(MN)=log_aM+log_aN$；其次，对数的乘法运算和加法运算之间的互相转化关系可以帮助在不同的情境中选取合适的计算方法简化计算，提升解题的效率

16.

正确答案是：

（1）学生甲的回答不完全正确，因为在直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$，P(x,y)是直线 l 上不同于P_0的任意一点的时候，可以得出斜率 $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$，可以得出在该条件下的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，这是过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线 l 的一种情况；若点$x=x_0$, $y=y_0$ 时，也存在过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线 l，但不能用上述方程表示。因此该方程不适用过点 $P_0(x_0,y_0)$ 但斜率不存在的直线。

（2）学生乙的回答不严谨，因为把点 $P_0(x_0,y_0)$ 代入 k 之后，可以看出分母为 $x_0-x_0=0$，此时 k 无意义。故不能说直线 l 上每一个点的坐标(x,y)都满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$；

①因为点 P(x,y)是直线 l 上不同于点P_0的任意一点，故由斜率公式可得 $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$，即 $y-y_0=k(x-x_0)$，可知过点 $P_0(x_0,y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上的每一点的坐标都满足该直线方程；

②假设 $P_1(x_1,y_1)$ 的坐标 x_1,y_1 满足方程，即 $y_1-y_0=k(x_1-x_0)$，若 $x_1=x_0$，则 $y_1=y_0$，说明点P_1与P_0重合，于是可得点P_1在直线 l 上；若$x_1\neq x_0$，则 $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，这说明点$P_1$和点$P_0$的直线的斜率为 k，于是可得点$P_1$在过点 $P_0(x_0,y_0)$、斜率为 k 的直线 l 上。

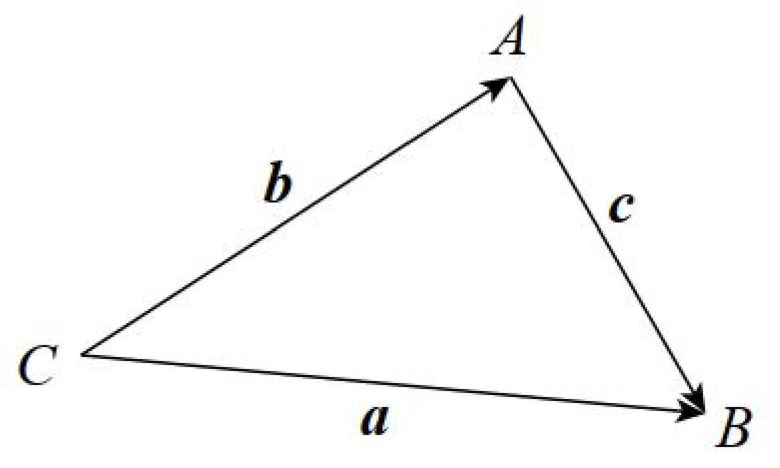
综上，说明该方程为过点 $P_0(x_0,y_0)$、斜率为 k 的直线 l 的方程

17.

正确答案是：

（1）证明：如图，设$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c}$ 那么 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$，

$|\overrightarrow{c}|^2=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}=(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\cos c$，所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



同理可知，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$。

（2）教学目标：

①知道余弦定理的公式，理解余弦定理公式的推导过程，掌握余弦定理，并能够运用余弦定理解决一些测量和几何计算有关的实际问题。

②学生用过推导和归纳的过程，提高推理论证能力和抽象概括能力。

③学生在独立思考的基础上，积极参与对数学问题的解答，感受到学习数学的乐趣。

教学重点：掌握余弦定理的公式，理解推导过程中使用的方法，能够利用余弦定理解决问题。

（3）问题 1：回忆直角三角形的三边关系，并根据该特征思考，若不是直角三角形时，三边又会有什么关系呢？

预设回答：学生回忆，若斜边为 a，则直角三角形的三边关系为$a^2=b^2+c^2$。

设计意图：通过熟悉的知识引出与猜想，帮助学生建立起新旧知识之间的联系，启发思考不是直角三角形的三边是否也存在一定的等量关系，或从边角关系入手，进而进入到学习状态中。

问题 2：任意画出一个三角形，给出任意一边的长度或长度的平方都有哪些方法可以表示？

预设回答：预设 1：根据两顶点距离的公式可以表示；

预设 2：根据向量的模长计算结合三角形法则也可以表示；

设计意图：通过对具体的三角形利用引导学生可以利用哪些方式表示线段长度这个知识，为利用向量法推导余弦定理做铺垫。

问题 3：结合向量的方式，如何借助边和角度的关系写出一个等量关系式子，给出结论。

预设回答：利用向量法给出结论：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

设计意图：通过让学生动手操作自己整理计算的方式感受知识的形成过程，理解与余弦定理的证明方法，逐步提升逻辑推理能力