

2024 年上半年中小学教师资格考试

数学学科知识与教学能力（高级中学）答案

1. 【答案】A

本题主要考查空间平面与直线位置关系的相关知识。因为平面 $x-y+z=0$ 的法向量为 $\vec{n}=(1,-1,1)$ ，直线的方向向量为 $\vec{s}=(1,-1,1)$ ，所以 $\vec{n}=\vec{s}$ ，则平面与直线的位置关系是相交且垂直。A 项正确。

B、C、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 A。

2. 【答案】D

本题主要考查特征值的计算的相关知识。根据特征值多项式可得 $|X-\lambda E|=0$ ，即 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$ 整理得 $(1-\lambda)(3-\lambda)=0$ ，解得 $\lambda_1=1$ ， $\lambda_2=3$ ，即其特征值为 1 和 3。D 项正确。

A、B、C 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 D。

3. 【答案】D

本题主要考查行列式的计算的相关知识。

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -3$$

D 项正确。

A、B、C 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 D。

4. 【答案】C

本题主要考查无穷小的比较的相关知识。因为当 x 趋近于 0 时， $\sin x$ 与 x 是等价无穷小，所以 $x \sin^2 x$ 与 x^3 是等价无穷小， $x^3 \sin x$ 与 x^4 是等价无穷小。故 x 趋近于 0 时， $x^3 \sin x$ 的幂次数最高，趋近于 0 的速度最快，其次为 $x \sin^2 x$ ，最后为 x^2 ，即它们趋近于 0 的速度从快到慢的次序 $x^3 \sin x$ ， $x \sin^2 x$ ， x^2 。

C 项正确。

A、B、D 三项：与题干不符，排除。

故正确答案为 C。

5. 【答案】C

本题主要考查矩阵的相关知识。由题意可得 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 $|X|=1 \neq 0$ ，故矩阵 X 为满秩可逆矩阵，即向量 α, β, γ 线性无关，则 α, β, γ 为 R^3 向量空间的一组基底，矩阵 X 的秩为 3，A、B、D 三项均正确；

又 $\alpha \cdot \beta = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$ ，故不满足正交，C项错误。

本题为选非题，故正确答案为C。

6. 【答案】B

本题主要考查变限积分的相关知识。

$2f(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$ 两边对 x 进行求导，可得 $2f'(x) = x^2 e^{-x}$ ，所以 $f'(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$ 。B项正确。

A、C、D三项：与题干不符，排除。

故正确答案为B。

7. 【答案】A

本题主要考查高中课标的相关知识。A项属于函数部分的课程内容，而B、C、D三项均与“向量的应用”相关，属于几何与代数部分的课程内容。

本题为选非题，故正确答案为A。

8. 【答案】D

本题主要考查教学论的相关知识。依据中学数学教学的基本原则中严谨性与量力性相结合的原则，根据中学生的知识水平与接受能力，数学教学必须循序渐进，量力而行。故确定数学教学难度的主要依据为学生的接受能力。D项正确。

A、B、C三项：与题干不符，排除。

故正确答案为D。

9. 【参考答案】

(1) 结合律和交换律都是一种运算定律，结合律是指几个数相乘，先把前几个数相乘，再和后面的数相乘，或先把后几个数相乘，再和前面的数相乘积不变；交换律是指几个数相乘，交换因数的位置，它们的积不变。所以第一个括号处和第三个括号处运用了结合律，第二个括号处运用了交换律。

(2) ①当 $n=1$ 时，左边 $= (ab) = ab$ ，右边 $= a^1 b^1 = ab$ ，左边=右边，从而， $n=1$ 时等式成立；

②假设 $n=k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 时等式成立，即 $(ab)^k = a^k b^k$ ，那么，当 $n=k+1$ 时，左边 $= (ab)^{k+1} = (ab)^k (ab) = a^k b^k ab = a^{k+1} b^{k+1}$ = 右边，即原式在 $n=k+1$ 时也成立。由①②可知，根据数学归纳法，原式对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，等式都成立。

10. 【参考答案】

设 $c=(x, y, z)$ ，因为 $a=(1, 1, 1)$ ， $b=(0, 3, -3)$ 所以 $a \times b = (-6, 3, 3)$ ， $(a \times b) \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 3 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (3z-3y, 6z+3x, -6y-3x) - 3a = (3, 3, 3)$ ，即 $z-y=1$ ， $2z+x=1$ 。又因为向量 c 的模长为 $\sqrt{2}$ 即 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ ，解得 $y=0$ ，或 $y=-1$ ，所以 $c=(1, -1, 0)$ 或 $c=(-1, 0, 1)$ 。

11. 【参考答案】

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以在 $x=0$ 处连续，从而有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ ，即 $1+b=-1$ ，

即 $b=-2$ ，又由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，得 $f'_-(0)=f'_+(0)$ ，而 $f'_-(0)=\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax-1-(-1)}{x} = a$ ， $f'_+(0)=\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x+b-(1+b)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ，则 $a=1$ 。

故 $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x-1)dx + \int_0^1 (e^x-2)dx = (\frac{1}{2}x^2-x)|_{-1}^0 + (e^x-2x)|_0^1 = e - \frac{9}{2}$ 。

12. 【参考答案】

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出，不仅要关注学生的学习结果，更要关注学生在学习过程中的发展和变化。在教学中，过程评价应重点关注以下几个方面：

一、学生的参与度和合作能力。过程评价首先要关注学生的课堂参与度和合作能力，比如是否积极参与讨论、主动提问、为小组做出贡献，以及学生能否在小组中有效沟通、分工合作、共同解决问题，都是过程评价需要关注的要点。

二、学生的思维过程和问题解决能力。数学是一门强调逻辑思维的学科，因此过程评价应重点关注学生的思维过程，包括学生在面对数学问题时如何进行分析、推理、归纳和总结，以及解决策略是否有效、是否具有创新性等。

三、学生的学习态度和学习习惯。过程评价应关注学生的学习态度是否积极、是否愿意接受挑战、是否善于从错误中学习等。同时，良好的学习习惯，如定时复习、整理笔记、自我检查等也是过程评价的重要内容。

四、数学表达和沟通能力。数学表达和沟通能力是数学学习中的重要技能。过程评价应关注学生的数学语言表达是否准确、清晰，能否用数学语言有效地解释问题、表达观点等。

13. 【参考答案】

以“等比数列概念教学”为例，数学概念的教学主要有以下几个环节：

①创设情境，引入概念

教师可以通过一些与等比数列相关的实际问题或情境，来引起学生的兴趣和好奇心，进而引出等比数列的概念。（比如教师可以借助一个细胞每过一定时间就分裂成两个相同细胞的情境，引导学生观察这一过程中细胞数量的变化规律，从而引出等比数列的概念。）

②探索发现，形成概念

在引入概念后，教师需要引导学生通过探索发现的方式，逐步深入理解等比数列的概念。（比如给出一些具体的等比数列实例，让学生观察、比较、分析这些数列的特点，引导他们发现等比数列相邻两项的比值相等的规律。教师还可以引导学生通过计算、推理等方式验证自己的发现，进一步加深对等比数列概念的理解。）

③归纳总结，深化概念

当学生对等比数列的概念有了一定的理解后，教师需要引导学生进行归纳总结，深化等比数列的概念和性

质。（比如让学生用自己的语言描述等比数列的特点，并总结出等比数列的概念：一个数列，从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数。同时，教师还可以引导学生探讨等比数列的性质，如等比数列中任意相邻两项的比值相等、等比数列的通项公式等。）

④巩固练习，应用概念

最后，通过设计一些巩固练习题，让学生在实践中运用等比数列的概念和性质，加深对概念的理解和记忆。

（可以设置多种题型来检验学生对等比数列概念的掌握情况。同时还可以引导学生将等比数列的概念应用于实际问题中，如求解等比数列的实际问题、利用等比数列的性质进行证明等，从而培养学生数学应用的能力和解决问题的能力。）

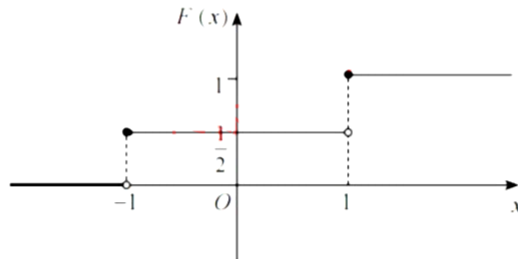
14. 【参考答案】

（1）由题意可知 $X(\omega)$ 的分布列为：

$X(\omega)$	-1	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\text{故 } X(\omega) \text{ 分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

分布函数 $F(x)$ 图像如图所示：



15. 【参考答案】

课题研究的过程包括选题、开题、做题、结题四个环节。学生需要撰写开题报告，教师要组织开展开题交流活动，开题报告应包括选题意义、文献综述、解决问题思路、研究计划、预期结果等。做题是解决问题的过程，包括描述问题、数学表达、建立模型、求解模型、得到结论、反思完善等。结题包括撰写研究报告和报告研究结果，由教师组织学生开展结题答辩。根据选题的内容，报告可以采用专题作业、测量报告、算法程序、制作的实物、研究报告或小论文等多种形式。

数学建模活动成果可以通过以下的方式进行评价：

- ①模型的准确性：需要考察模型预测结果与实际情况的差距。可以通过误差分析、模拟实验等方法来评估。
- ②模型的可行性：主要涉及模型输入数据的可得性、计算成本以及计算难度等方面。此外，模型的复杂度

也应该适中，避免过于复杂导致难以理解和应用。

③模型的稳定性：稳定性是指模型在不同环境下是否具有一致性和可靠性。这包括输入变化、参数变化以及数据质量变化等因素对模型结果的影响。

④模型的创新性：在评价数学建模成果时，也要关注模型的创新性。创新性体现在模型的新颖性、独特性以及对于现有问题的解决能力上。

⑤模型的实用性：模型的实用性可以通过其在实际问题中的应用效果、用户反馈以及推广程度等方面来评估。

⑥文档和报告的完整性：文档和报告应该清晰地阐述模型的建立过程、求解方法、结果分析以及结论建议等。

⑦团队合作与沟通能力：团队成员之间应该能够有效地协作、分工和沟通，共同推进项目的进展。

综上所述，评价数学建模活动成果需要综合考虑多个方面的因素。对数学建模成果做出合理的评价，并为未来的建模活动提供有益的参考和借鉴。

16. 【参考答案】

(1) 题目中 S_n 与 T_n 之比是关于 n 的一次函数的比，而等差数列前 n 项和是类似关于项数 n 的二次函数，显然，在化简的过程中约去了一个含有 n 的公因式，对于两位学生的板演，第一位学生根据题目中两个等差数列前 n 项和之比，直接赋值 $S_n=1n+3$ ， $T_n=2n+5$ ，但实际比值是约分后的结果，故此同学解法有误。第二位学生解题过程虽设了参数，但未考虑到约去的应是含有 n 的因式，故应设为 $S_n=kn(4n+3)$ ， $T_n=kn(2n+5)$ ，并且 $k \neq 0$ ，故第二位学生解法也不恰当。

(2) 如果我是该教师，我会结合两位学生解题的差异性，以及是否正确，请学生们讨论。讨论结束后我会带领学生回忆等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$ ，并解释 S_n 是关于项数 n 的二次函数，可写成 $S_n=An^2+Bn$ ，而题目中 S_n 与 T_n 之比是关于 n 的一次函数的比，所以可以设约去的公因式为 kn ，则 $S_n=kn(4n+3)$ ， $T_n=kn(2n+5)$ ，再用 $a_8=S_8-S_7$ 和 $b_8=T_8-T_7$ 进行计算，得出正确答案。最后带领学生共同总结，针对这类问题如何解答，以及求等差数列前 n 项和的注意事项。在整个教学过程中，老师也要对学生给予鼓励性评价，让学生寻找问题点，以便更好地掌握所学知识。

17. 【参考答案】

(1) 设点 M 的坐标为 (x, y) ，因为点 A 的坐标是 $(-5, 0)$ ，所以直线 AM 的斜率 $k_{AM}=\frac{y}{x+5}(x \neq -5)$ 。同理，直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{y}{x-5}(x \neq 5)$ 。由已知，有 $\frac{y}{x+5} \times \frac{y}{x-5}=-\frac{1}{9}(x \neq \pm 5)$ ，化简，得点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1(x \neq \pm 5)$ 。点 M 的轨迹是除去 $(-5, 0)$ ， $(5, 0)$ 两点的椭圆。

(2) 教学目标：

①形成和完善椭圆的标准方程的概念，及时巩固椭圆的概念与椭圆的标准方程。

②经历自主探究，小组合作交流的过程，提升分析问题、解决问题的能力。

③认识到知识与知识之间的密切联系，增强应用意识，在解决数学问题的过程中，能够克服困难，树立学好数学的信心，体会数学的价值。

教学重点：掌握动点轨迹方程的求解方法。

教学过程：

环节一：新课引入

教师活动：提出问题：椭圆的标准方程如何得出？引导学生思考后回答问题，教师给予评价。

学生活动：思考后得出结论：通过动点到两个定点的距离的和为定值列出等式，并化简。

教师活动：再次抛出问题：我们能否根据这种思路得出其他动点轨迹呢？由此引出题目。

【设计意图】通过复习上节课的知识，学生可以回顾已学知识，为进一步学习新知识搭建桥梁。

环节二：新课讲授

①初步感知

教师活动：通过课件出示例 3，并引导学生回顾椭圆标准方程的推导过程，提问：

求点 M 的轨迹方程的方法是什么？引导学生独立思考后回答，教师给予评价。

学生活动：学生独立思考后得出结论：利用点 M 满足的几何性质列出方程，并化简，最后求出其轨迹方程。

②深入探究

教师活动：再次抛出问题：这个题目我们可以利用点 M 的什么几何性质求其轨迹方程？组织学生 4 人小组讨论交流，限时 3 分钟，学生讨论期间教师进行巡视指导，必要时给出提示。

学生活动：学生经过小组讨论交流后得出：设点 M 的坐标为 (x, y) ，那么直线 AM，BM 的斜率就可用含有 x, y 的式子分别表示，由直线 AM，BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{9}$ ，可得出 x, y 之间的关系式，进而得到点 M 的轨迹方程。

教师活动：针对学生的回答给出评价。

③归纳总结

教师活动：引导学生再次梳理过程，强调并讲解注意事项等（如考虑 x 的取值范围）。

【设计意图】通过提问的方式，可以很好地引导学生思考，学生能利用已有的知识探究并解决问题，建立前后知识的联系；且通过一系列的问题引导学生逐步探索求曲线方程的方法，可以提升学生的几何直观和数学运算能力，同时也培养了学生的应用意识。

环节三：巩固练习

教师活动：教师通过多媒体展示有关该知识点不同类型、不同层次的练习题目，引导学生独立思考并作答，或者找学生代表在黑板上进行板演，完成后教师针对结果给予评价并总结。

【设计意图】设置不同层次的练习题，不仅能使学生新学的知识得到及时巩固，也能使学生的思维能力得到有效提高，使其更好地学以致用。

环节四：课堂小结

教师活动：教师引导学生从知识、能力和情感等方面畅谈本节课的收获，针对学生的回答，教师采用多种方式进行评价并总结。

【设计意图】检验学生对本节课重点内容的认知情况，更进一步增强学生的自信心和荣誉感，使他们更加热爱数学。

环节五：布置作业

学生完成课后剩余练习题或者教师自主设计一道能用本节课所学知识解决的生活实际问题。

【设计意图】对本节课知识进行再巩固、再认识。